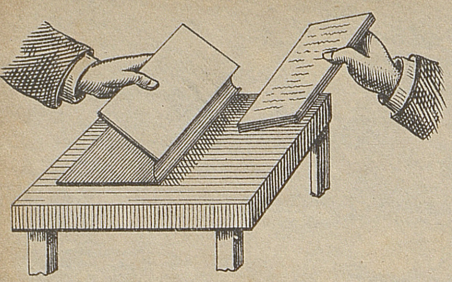

colorchecker CLASSIC
x·rite
mm

MAIN GAUCHE MAIN DROITE



RELIURE ÉLECTRIQUE OU INSTANTANÉE

I. F.

Exiger la marque de Fabrique PARIS-LONDON
Patent.

MODE D'EMPLOI

De la main gauche, soulever un des côtés en appuyant l'intérieur de l'autre sur le bureau ; le dos se trouvant ainsi ouvert, la main droite sert à introduire ou retirer les papiers.

Laisser la reliure revenir sur elle-même et les papiers se trouvent fixés.

N.-B. — La chemise renfermée dans chaque reliure n'est pas indispensable, mais elle facilite l'introduction des papiers.

RELIURE ÉLECTRIQUE

Servant à relier soi-même, sans difficulté, les papiers, manuscrits, documents, etc.

	FORMAT.	HAUT. LARG.
N° 0.	....	22 × 14
» 1.	In-8°	24 × 16
» 2.	In-4°	29 × 21
» 3.	Musique	36 × 26
» 4.	Ministre	32 × 22
» 5.	In-8° Jésus..........	28 × 18
» 6.	Journal illustré, etc....	40 × 28
» 7.	Quadrille	28 × 36
» 8.	Traite Mandat........	13 × 29
» 9.	Journaux illustrés grand format	46 × 33

I. F.

PARIS, LONDON.

PATENT.

Spécialité d'Articles anglais pour Bureaux.

N° 1

...vêtue de la signature ci-dessous,
...itable Reliure électrique.

Leibnitz.

~~Kant~~ - Hegel

Renouvier.

Cauchy - Moigno.

Evellin.

— Bolzano.

Du Bois-Reymond

— Chasles.

— Staudt.

Lüroth.

Helmholtz -

Kronecker.

Bolzano.

Poincaré.

Weierstrass.

Dedekind

Méray.

Carnot.

Lipschitz.

Schubert.

Bellavitis.

Mourey -

Faure

Bouasse (Polarisation)

<u>Leibnitii et Bernoullii Commercium epistolicum</u>
2 vol. in 4° Lausanne et Genève, Bousquet, 1745.

Tome I, p. 370 : Fortasse infinita, quæ concipimus, et infinite parva imaginaria sunt; sed apta ad determinanda realia, ut radices quoque imaginariæ facere solent.

I. p. 384 : Dubitari posse an lineæ rectæ infinitæ longitudine, et tamen terminatæ revera dentur. Interim sufficere pro calculo, ut fingantur, uti imaginariæ radices in Algebra.

I. p. 397 : Uti D. Volderus, ita olim Gregorius a S. Vincentio alicubi dixit in infinito [locum [non habere] Axioma, quod totum sit majus parte. Sed mihi videtur alterutrum dicendum, vel infinitum revera non esse unum totum, vel infinitum, si totum sit, et tamen non sit majus sua parte, esse aliquid absurdum. Sane ante multos annos demonstravi numerum seu multitudinem omnium numerorum contradictionem implicare, si ut unum totum sumatur.

B. p. 402 : Infinita et infinite parva non posse demonstrari existere, sed etiam non posse demonstrari non existere; probabile tamen esse existere. Si omnes termini hujus progressionis $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ .... existunt actu, ergo existit infinitesimus, et omnes qui eum sequuntur.

B. p. 407: Videtur mihi contradictio dicere omnes terminos hujus progressionis ... existere, infinitesimos autem revera non esse terminos: si enim infinitesimi non existunt, tunc finiti sunt termini; ergo non omnes existunt, contra hypothesim.

I. p. 423: De Infinitesimis res huc redit, ut probetur hæc, quam adhibes, propositio: Si infiniti numero sunt in serie ..., existit infinitesimus. Quid enim si quilibet eorum sit finitus, et assignabili intervallorum numero distans a primo? Nec video quid impediat concipi seriem conflatam non nisi ex terminis magnitudine finitis, sed numero infinitis.

I. p. 431: Dubitari potest an sequatur: Positis terminis decem, datur decimus; ergo positis terminis infinitis, datur infinitesimus. Dicet enim fortasse aliquis, argumentum de finito ad infinitum hic non valere. Et cum dicitur dari infinita, non dicitur dari eorum numerum terminatum, sed dari ~~quovis~~ plura quovis numero terminato; et pari jure conclusurum iri: Inter numeros decem datur ultimus, qui et maximus eorum; ergo et inter omnes numeros datur ultimus, qui et maximus omnium numerorum; qualem tamen numerum puto implicare contradictionem.

p. 440: Concedo multitudinem infinitam, sed hæc multitudo non facit numerum seu unum totum; nec aliud significat, quam plures adesse terminos, quam designari possint.

Leibniz : de Arte combinatoria. Prooemium (1666.)
(Extrait.)

Entis affectiones: Qualitas, Quantitas, Relatio.

Quantitas = Relatio rei ad partem suam

« Omnis Relatio ~~aut~~ est Unio aut Convenientia. In Unione autem res inter quas hæc relatio est dicuntur partes, sumtæ cum unione, Totum. Hoc contingit quoties plura simul tanquam Unum supponimus. Unum autem esse intelligitur quicquid uno actu intellectus, seu simul, cogitamus, v. g. quemadmodum numerum aliquem quantumlibet magnum, sæpe cæca quadam cogitatione simul apprehendimus, cyphras nempe in charta legendo, cui explicate intuendo ne Mathusalæ quidem ætas suffectura sit. Abstractum autem ab Uno est Unitas, ipsumque totum abstractum ex unitatibus, seu totalitas, dicitur Numerus. Quantitas igitur est numerus partium. Hinc manifestum in re ipsa quantitatem et numerum coincidere. Illam tamen interdum quasi extrinsecè, relatione seu ratione ad aliud, in subsidium nempe quamdiu numerus partium cognitus non est, exponi. Et hæc (est origo) ingeniosæ Analyticæ speciosæ, quam excoluit inprimis Cartesius, postea in præcepta collegere Franc. Schottenius, et Erasmius Bartholinus, hic elementis Matheseos universalis, ut vocat. Est igitur Analysis doctrina de rationibus et proportionibus, seu quantitate non exposita; Arithmetica de quantitate exposita, seu numeris. Falso autem Scholastici credidere numerum ex sola divisione continui oriri, nec ad incorporea applicari posse. Est enim numerus quasi figura

quaedam incorporea orta ex unione entium quorumcumque v. g. Dei, Angeli, Hominis, Motus, qui simul sunt Quatuor. Cum igitur numerus sit quiddam universalissimum, merito ad Metaphysicam pertinet; si Metaphysicam accipias pro doctrina eorum quae ~~in~~ omni entium generi sunt communia.....

... ubi ~~Analysis et~~ Arithmetica atque Analysis agunt de quantitate entium, ita Geometria de quantitate corporum, aut spatii quod corporibus coextensum est...

Examen des Principes du R. P. Malebranche — ibid

Philarète. On doutera cependant avec raison, si nous avons une idée d'un Tout infini, ou d'un infini composé de parties; car un composé ne saurait être un absolu. On dira que nous concevons bien, par exemple, que toute ligne droite peut être prolongée, ou bien qu'il y a toujours une ligne droite plus grande que la donnée; mais que cependant nous n'avons point l'idée d'une ligne droite infinie, ou qui soit plus grande que toutes les autres qu'on peut assigner....

Philarète. Il n'y a point de ligne droite infinie; mais toute ligne droite peut toujours être prolongée ou surpassée par une autre plus grande...

Lettre de M. Leibniz à M. Remond de Montmort, contenant des Remarques sur le Livre du P. du Tertre contre le P. Malebranche.
Hanovre, le novembre 1715.

VI... L'Auteur ajoute que dans la prétendue connoissance de l'infini, l'esprit voit seulement que les longueurs peuvent être mises bout-à-bout et répétées autant qu'on voudra. Fort bien; mais cet Auteur pouvait considérer que c'est déjà connoître l'infini, que de connoître que cette répétition se peut toujours faire.

V. Réflexions de M. L. sur l'Essai de l'Entendement humain de M. L
« Il y a encore qques autres choses dans ce second Livre qui m'arrêtent....» p. 22

Dutens, II Partie.

<u>Leibniz</u>. — Sur l'infini mathématique (Extraits)

Lettre de M. Leibniz à M. Foucher chanoine de Dijon

Sur quelques axiomes de philosophie (1693)

238. « Mon axiome, que la nature n'agit jamais par saut, est d'un grand usage dans la Physique. Il détruit les atomes, les petits repos, les globules du second élément, et les autres semblables chimères. Il rectifie les loix du mouvement. Ne craignez point, Monsieur, la tortue que les Pirrhoniens faisaient aller aussi vite qu'<u>Achille</u>. Vous avez raison de dire, que toutes les grandeurs peuvent être divisées à l'infini. <u>Il n'y en a point de si petites dans laquelle on ne puisse concevoir une infinité de divisions que l'on n'épuisera jamais</u>. Mais je ne vois pas quel mal il en arrive, ou quel besoin il y a de les épuiser. Un espace divisible sans fin se passe dans un tems aussi divisible sans fin. Je ne conçois point d'indivisibles physiques sans miracle, et je crois que la nature peut réduire les corps à la petitesse que la Géométrie peut considérer....

239. Les expressions semblables à cet axiome, <u>Extrema in idem recidunt</u>, vont un peu trop loin ; comme lorsqu'on dit que l'infini est une sphère dont le centre est par-tout, et la circonférence nulle part, il ne faut pas les prendre à la rigueur ; néanmoins elles ne laissent pas d'avoir un usage particulier pour l'invention, à peu près comme les imaginaires de l'Algèbre. C'est ainsi que l'on conçoit la parabole comme une ellipse à foyer infiniment éloigné ; et par là on ~~établit~~ maintient une certaine ~~qual~~ universalité dans les énonciations des coniques. Le calcul nous mène quelquefois à l'infini sans y penser. On pourrait donc ainsi conclure, qu'au moins en cas de prétendue vitesse infinie, chaque point du cercle serait toujours au même endroit ; quoiqu'après tout, une vitesse infinie soit impossible, aussi-bien qu'un cercle infini. Avec tout cela ce cercle infini peut encore avoir son usage, en calculant.

car si l'analyse me faisoit voir que le rayon du cercle demandé dans le plan donné est infini, je conclurrois que le plan entier du cercle demandé est le lieu qu'on cherche. Ainsi si je ne trouvois pas ce que je cherche, sçavoir un cercle qu'on demande je trouverois au moins ce que je devois chercher, sçavoir que le lieu demandé est le plan demandé (?), et qu'il n'y a point de tel cercle dans ce plan. De sorte que voila omnia sana sanis et l'analyse tire des utilités réelles des expressions imaginaires. C'est de quoi j'ai des exemples très importans. Il est vrai que des vérités on ne conclud que des vérités; mais il y a de certaines faussetés qui sont utiles pour trouver la vérité.»

Reponse de M. Leibniz à l'extrait de la lettre de M. Foucher... insérée dans le Journal du 16 mars 1693.

«... Quant aux indivisibles, lors qu'on entend par là les simples extrémités du tems ou de la ligne, on n'y sçauroit concevoir de nouvelles extrémités, ni des parties actuelles, ni potentielles. Ainsi les points ne sont ni gros ni petits, et il ne faut point de saut pour les passer. Cependant le continu, quoiqu'il ait par-tout de tels indivisibles, n'en est point composé; comme il semble que les objections des Sceptiques le supposent, qui à mon avis n'ont rien d'insurmontable, comme on trouvera en les rédigeant en forme. Le P. Grégoire de Saint Vincent a fort bien montré par le calcul même de la divisibilité à l'infini, l'endroit où Achille doit attraper la tortue qui le dévance, selon la proportion des vitesses. Ainsi la Géométrie sert à dissiper ces difficultés apparentes.

Je suis tellement pour l'infini actuel, qu'au lieu de admettre que la nature l'abhorre, comme l'on dit vulgairement, je tiens qu'elle l'affecte par tout, pour mieux marquer les perfections de son Auteur. Ainsi je crois qu'il n'y a aucune partie de la matière qui ne soit, je ne dis pas divisible, mais actuellement divisée; et par consequent la moindre particelle doit être considérée comme un monde plein d'une infinité de créatures différentes.»

~~XXX~~ Epistolæ Leibnitii ad P. des Bosses. 14 février 1706.

265. Ens et unum converti tecum sentio; unitatemque esse principium numeri, si rationes spectes, seu prioritatem naturæ, non si magnitudinem: nam habemus fractiones, unitate utique minores in infinitum.

Continuum in infinitum divisibile est. Idque in linea recta vel ex eo constat, quod pars ejus est similis toti. Itaque cum totum dividi possit, poterit et pars et similiter quævis pars partis. Puncta non sunt partes continui, sed extremitates, nec magis minima datur pars lineæ, quam minima fractio unitatis.

Infinitum actu in natura dari non dubito, ...

66. P.S. Cum ubique Monades seu principia unitatis substantialis sint in materia, consequitur hinc quoque infinitum actu dari; nam nulla pars est aut pars partis quæ non monades contineat.

11 mars 1706.

267. Infinitum actu in magnitudine non æque ostendi potest ac in multitudine. Argumenta contra infinitum actu, supponunt, hoc admisso dari numerum infinitum, item infinita omnia esse æqualia. Sed sciendum, revera aggregatum infinitum neque esse unum totum, aut magnitudine præditum, neque numero constare. Accurateque loquendo, loco numeri infiniti dicendum est plura adesse, quam numero ullo exprimi possint; aut loco lineæ rectæ infinitæ, productam esse lineam ultra quamvis magnitudinem, quæ assignari potest, ita, ut semper major recta adsit(1). De essentia numeri, lineæ et cujuscunque totius est, esse terminatum. Hinc et si magnitudine infinitus esset mundus, unum totum non esset; nec cum quibusdam veteribus fingi posset Deus velut anima mundi, non solum quia causa mundi

(1) Cf. Examen des principes du R.P. Malebranche (Dutens II, I, 212.)

est, sed etiam quia mundus totus unum corpus non foret, nec pro animali haberi posset, neque adeo nisi verbalem haberet unitatem. Est igitur loquendi compendium, cum unum dicimus, ubi plura sunt quam ullo toto assignabili comprehendi possunt, et magnitudinis instar efferimus, quod proprietates ejus non habet. Quemadmodum enim de numero infinito dici nequit, par sit an impar; ita nec de recta infinita utrum data recta sit commensurabilis an secus; ut adeo impropriae tantum hae de infinito velut una magnitudine sint locutiones, in aliqua analogia fundatae, sed quae si accuratius examines, subsistere non possunt. Solum absolutum et indivisibile infinitum veram unitatem habet, nempe Deus. Atque haec sufficere puto ad satisfaciendum omnibus argumentis contra infinitum actu, quae etiam ad infinitum potentiale suo modo adhiberi debent. Neque enim negari potest, omnium numerorum possibilium naturas revera dari, saltem in divina mente, adeoque numerorum multitudinem esse infinitam.

Cf. Théodicée, 195.

Ego philosophice loquendo non magis statuo magnitudines infinite parvas quam infinite magnas, seu non magis infinitesimas quam infinituplas. Utrasque enim per modum loquendi compendiosum pro mentis fictionibus habeo, ad calculum aptis, quales etiam sunt radices imaginariae in Algebra. Interim demonstravi, magnum has expressiones usum habere ad compendium cogitandi adeoque ad inventionem; et in errorem ducere non posse, cum pro infinite parvo substituere sufficiat tam parvum quam quis volet, ut error sit minor dato, unde consequitur errorem dari non posse.

Caeterum, ut ab ideis Geometriae, ad realia Physicae transeam, statuo materiam actu fractam esse in partes quavis data minores, nullamque esse partem, quae non actu in alias sit subdivisa diversos motus exercentes. Id postulat natura materiae et motus, et tota rerum compages, per Physicas, Mathematicas et Metaphysicas rationes.

1er Septembre 1706.

..... Quartam [propositionem], ni fallor, jam refutarunt Mathematici, et non pauca ipse edidi scientiae infiniti specimina. Interim sentio, proprie loquendo, infinitum ex partibus constans neque unum esse neque totum, nec nisi per notionem mentis concipi, ut quantitatem. Solum infinitum impartibile unum est, sed totum non est: id Infinitum est DEUS.

305. 24 Janvier 1713.

Infinitudo continui physici, in Hypothesi merarum monadum, non tam penderet ex ratione optimi, quam ex principio Rationis sufficientis; quia nulla est ratio limitandi seu finiendi sive alicubi sistendi. cf. Théodicée 195.

Continuum vero Mathematicum consistit ~~ex~~ in mera possibilitate, ut numeri; ideo in eo necessaria est infinitudo,* ex ipsa ejus notione.

298. 16 Juin 1712.

Explicationem phaenomenorum omnium per solas Monadum perceptiones inter se conspirantes, seposita substantia corporea, utilem censeo ad fundamentalem rerum inspectionem. Et hoc exponendi modo spatium fit ordo coexistentium phaenomenorum, ut tempus successivorum; nec ulla est monadum propinquitas, aut distantia spatialis, vel absoluta, dicereque esse in puncto conglobatas, aut in spatio disseminatas, est quibusdam fictionibus animi nostri uti, dum imaginari libenter vellemus, quae tantum intelligi possunt. In hac etiam consideratione nulla occurrit extensio aut compositio continui, et omnes de punctis difficultates evanescunt. Atque hoc est, quod dicere volui alicubi in Theodicaea[1] mea difficultates de compositione continui admonere nos debere res longe aliter esse concipiendas.

(1) n° 384.

10

Je crois qu'il faut distinguer deux sens du mot *prætervehi* : le premier, contenu dans la définition 2 ; le second, contenu dans la définition 9. Dans le premier sens, il désigne le glissement d'un corps mobile sur un corps ~~fixe~~ immobile ; dans le second, il désigne une espèce de choc, qui a lieu quand le corps choquant vient rencontrer la trajectoire du choqué au moment où celui-ci passe devant celui-là (1)

Au fond, la distinction entre ce cas et les autres cas de choc (désignés par *concursus*, *occursus*, *accursus*) est purement imaginaire (sauf dans le cas où un corps mobile vient choquer un corps immobile) cf. th. 4 et 7.

Je crois devoir définir en langage moderne quelques expressions de Leibniz, pour éclaircir la suite.

La mesure de la ligne du mouvement est la tangente à la trajectoire du mobile au point où le choc a lieu ; de plus, elle désigne une longueur égale à celle de l'arc de la trajectoire qu'on considère, portée sur cette tangente à partir du point du choc.

Le côté de l'arrivée est la droite ou le plan perpendiculaire à cette tangente en son extrémité opposée au point du choc. Droite ou plan, suivant que le mouvement des deux corps a lieu dans un même plan ou dans l'espace. Je dirai dans la suite : plan normal à la trajectoire.

Cela posé, les définitions de l'*occursus* et de l'*accursus* sont très-claires. Il y a *occursus* quand ~~la tangente~~

(1) Dans le premier sens c'est le corps ~~choquant~~ mobile qui passe devant l'autre : dans le second, c'est le choqué qui passe devant le choquant.

à la trajectoire d'un des corps, prolongée au-delà du point du choc, rencontre le plan normal à la trajectoire de l'autre; accursus dans le cas contraire. En un mot, il y a occursus quand les tangentes aux trajectoires (au point du choc) font un angle obtus, accursus quand elles font un angle aigu ou droit.

L'occursus est dit droit quand les deux tangentes font un angle de 180° (sont dans le prolongement l'une de l'autre, ou encore parallèles, si le choc n'est pas central).

L'accursus est dit droit quand les deux tangentes font un angle de 90°, ou, comme on dit, quand les deux corps se rencontrent à angle droit.

Je trouve la preuve que le cas de l'incurrens et du praetervehens ne diffère pas réellement du cas de concur[…] dans les théorèmes 4 et 7. En effet, si les deux corps qui se choquent ont des vitesses égales, il est impossible de distinguer l'incurrens du praetervehens (comme cela serait possible si ~~l'un~~ celui-ci se mouvait plus lentement que celui-là). Mais, même dans le cas général (vitesses inégales) cette distinction n'a pas de raison d'être, car ~~les~~ chacun des deux corps est à la fois choquant et choqué (impingens et excipiens). Je ne vois là qu'une différence toute sentimentale et mythologique, qui vient de ce que l'observateur s'intéresse à l'un des deux corps et l'accompagne en imagination.

---

(1) «Utrumque concurrentium est mutuo incidens» (Th. 8)

Fundamenta praedemonstrabilia

1° Des parties sont données en acte dans le continu.
2° et elles sont actuellement infinies (l'indéfini cartésien n'est pas dans la chose mais dans l'esprit.)
3° Il n'y a pas de minimum d'espace ou de corps.
4° Sont donnés des indivisibles ou inétendus. Le point est le commencement de la ligne, inétendu (par dichotomie.)
5° Le point n'est pas ce qui n'a pas de parties, mais ce qui n'a aucune extension. (Méthode de Cavalieri)
6° Le rapport du repos au mouvement n'est pas celui du point à l'espace, mais de zéro à un.
7° Le mouvement est continu (sans arrêt ou repos.)
8° Car si une chose entre en repos elle ne peut être mue que par une nouvelle cause
9° Ce qui se meut tend à se mouvoir toujours avec les mêmes vitesse et direction (plaga).
10° Le conatus est au mouvement ce que le point est à l'espace ou l'un à l'infini : c'est le commencement et la fin du mouvt
11° Tout ce qui se meut, si peu que ce soit, propage son conatus dans le plein à travers tous les obstacles. Car même lorsqu'il est forcé de s'arrêter, il fait effort pour ~~continuer~~ avancer, donc il s'efforce de déplacer les obstacles, c'est-à-d. qu'il commence à les déplacer.
12° Dans un même corps peuvent exister en même temps plusieurs efforts contraires.
13° Un point du corps mobile est en plusieurs points de l'espace à l'instant de l'effort ; il remplit un lieu plus grand qu'au repos. 14° Tout ce qui se meut n'est jamais dans un seul lieu pendant qu'il se meut, ~~même~~ pas dans un instant (minimum de temps) (?) car ce qui se meut dans le temps, fait effort dans l'instant.
[Il n'y a pas selon Leibniz, de minimum de temps, ni d'espace.]
15° Au moment d'une rencontre de deux choc, les deux points ou les deux extrémités des corps sont en un même point (ou lieu)
16° Des corps qui se pressent ou se poussent sont cohérents (ὧν τὰ ἔσχατα ἕν, Aristote)

17° Aucun effort ne dure sans mouvement au-delà de l'instant si ce n'est dans l'esprit. Car ce que l'effort est dans l'instant, le mouvement l'est dans le temps.

« Omne enim corpus est mens momentanea, seu carens recorda[tione] »

18° Les points et les efforts peuvent être inégaux; les instants au con[traire] sont toujours égaux. Le temps a pour image le mouvement unifo[rme]. Un effort ne peut parcourir une ligne finie (en un instant) sans quoi [il] parcourrait une ligne infinie en un temps fini. De l'inégalité des [efforts] résulte celle des points parcourus (espaces plus petits que tout espace do[nné]). Par ex. les arcs infiniment petits de deux cercles inégaux sont inéga[ux]. Leibniz soutient que l'arc infiniment petit diffère de sa corde, et [l'effort] suivant l'arc (tendant à produire un mouv^t circulaire) diffère de l'effort suivant la corde (tendant à produire un mouvement recti[ligne]).

19° Deux efforts simultanés se composent en un seul, chacun gar[dant] son mouvement. Exemple: la cycloïde est engendrée par la compo[sition] de deux efforts, le rectiligne (de translation) et le circulaire (de rotat[ion]).

20° Un corps qui se meut imprime à un autre, sans diminuer [son] mouvement, ce que l'autre peut recevoir sans changer le mouv^t ant[érieur].

21° Si un corps ne peut tout faire à la fois, et si la cause est éga[le] pour tous les cas, aucune échappatoire n'étant possible (tertium nu[llum]) il ne fait rien. D'où repos (Th. 11, 12).

22° Si des efforts non composables sont inégaux, ils se détrui[sent] l'un l'autre, la direction du plus fort étant conservée (Th. 1, 2, 3).

23° Si les efforts non composables sont égaux, les deux directions [sont] mutuellement déviées, c.à.d. que les corps en suivent une troisième intermédiaire, si elle existe, en conservant la vitesse de l'effort (Th. 7, 8).

« Hic est velut apex rationalitatis in motu » car le choix d'une nou[velle] direction a quelque chose d'intelligent, et ne résulte pas des données b[rutes].

24° Nihil est sine ratione. Corollaires: Il faut changer le moi[ns] possible; choisir le milieu entre les contraires; ajouter à l'un quoi que ce soit pour que ni l'un ni l'autre ne perde, etc. (ces principes régissent aussi la science civile.)

Theoriæ motus abstracti definitiones.

Un corps qui se meut en touche un autre, ou ne le touche pas.

1° Il le touche, s'il n'est pas donné d'espace intermédiaire; si, le touchant, il se meut, ou il passe devant, ou il le pousse;

2° Il passe devant, si en continuant son mouvement il ne déplace aucune partie de l'autre;

3° Il le pousse, s'il en déplace une partie; ou le choque, s'il le fait mouvoir.

4° Il pousse le tout, s'il déplace l'autre corps tout entier;

5° Il pousse une partie, dans le cas contraire.

6° La ligne du mouvement est celle que décrit le centre du mobile; la ligne d'impulsion est celle que décrit le centre du corps qui pousse.

7° La mesure de la ligne du mouvement est cette ligne elle-même si elle est droite, ou cette ligne rectifiée, si elle est courbe.

8° Ou bien la ligne du mouv^t du choquant joint l'extrémité de la ligne du mouv^t du choqué, ou bien elle la joint en un autre point.

9° Dans ce dernier cas, le ~~choquant est dit~~ incurrere rencontrer le choqué, et le choqué passe devant le choquant (praetervehi)

10° Dans le premier cas, ~~tous deux sont dits~~ choquants, et concourants.

11° Occursus, quand la mesure de la ligne du mouv^t de l'un prolongée tombe sur le côté de l'arrivée de l'autre

12° Accursus dans le cas contraire.

13° L'occursus est droit, si la mesure de la ligne du mouv^t prol fait un angle dr. avec le côté de l'arrivée de l'autre, ou coïncide avec la mesure de la ligne du mouv^t de l'autre:

14° Oblique dans le cas contraire.

15° L'accursus est droit, si la mesure de la ligne du mouv^t est parallèle au côté de l'arrivée de l'autre, ou fait un angle droit avec la mesure de la ligne du mouv^t de l'autre;

16° Oblique, dans le cas contraire.

17° Le côté de l'arrivée (ou d'où l'on vient) est la droite (ou le plan) d'où la mesure de la ligne du mouv^t part perpendiculairement du côté ~~vers~~ ~~du~~ choc.

18° Le choc est central, si la ligne du mouv^t du choquant pro[...]
passe par le centre du corps choqué ;
19° Excentrique, dans le cas contraire
20° Un corps rase l'autre, quand au moment du contact il ~~le dépl~~ tend pas à le déplacer tout entier (soit en passant dev[...]
soit en le choquant excentriq^t.) Les extrémités (termini) d[...]
corps sont soit des surfaces soit ~~d'un côté~~ un point ou un[...] pour lui même
21° Un corps est constitué par des parties qui doivent rester c[...]
contiguës.
22° Elles sont cohérentes, si l'une étant mue, les autres se m[...]
23° Flexion est un changement ~~entre~~ de droit en courbe (ou[...]
24° Face est toute ~~extrémité~~ qui peut être touchée par u[...]
(corps) suivant ~~en~~ une seule ~~coup~~ direction (?) ou qu'une seule droite peut[...]
intérieurement (s'agit-il d'un plan ?)
25° Dureté est une cohésion qui ne peut surmonter un fa[...]
26° Figure simple est celle dont toute face est en forme d[...]
seule ligne ou surface (?)
27° Une ligne ou surface unique est celle qui peut être décr[...]
seul mouvement
28° Un seul mouvement est successif, ~~s'il se ou le~~ s'il se conti[...]
~~tinement~~ c.à.d par lui même, aucune ~~imp~~ impulsion extérieu[...]
n'intervenant.
29° Corps rotiforme est celui qui peut se mouvoir sans c[...]
de lieu (~~corps de révolution~~) C'est le seul mouv[...]
qui puisse exister dans le plein (ch. partie venant oc[...]
la place d'une autre partie)

Théorèmes.

1° Si un corps en choque un autre, soit au repos soit se mouvant plus lentement (dans le même sens ou en sens opposé) il l'emmène avec ~~lui~~ soi (dans la même direction) avec la différence des vitesses.

2° Si l'incurrens se meut plus lentement que le praterrchens, et le choque centralement, le praterrchens l'emmène avec soi avec la différence des vitesses.

3° Si ~~le choquant~~ l'incurrens choque centralement un corps avec une vitesse supérieure ~~le choqu~~ il l'emmène avec soi avec la diff. des vitesses.

4° Si l'incurrens et le praterrchens ont la même vitesse, ils se mouvront comme des ~~concourants~~ corps qui concourent sous un certain angle avec la même vitesse (v. Th. 7.)

5° Si le praterrchens choqué se meut autour de son axe propre, il sera à la fois choquant et choqué ; il retiendra son mouvement et recevra le mouvement de l'autre.

6° Si le choc ~~est excentrique~~, et si le choqué est cohérent le choquant ~~le choquant adhérera au choqué, et~~ continuera son mouvement, et laissera au choqué son ~~choix~~ mouvement antérieur, en lui ajoutant un mouvement (de rotation) autour de son axe propre, de même vitesse que le mouvement du choc au lieu du choc.

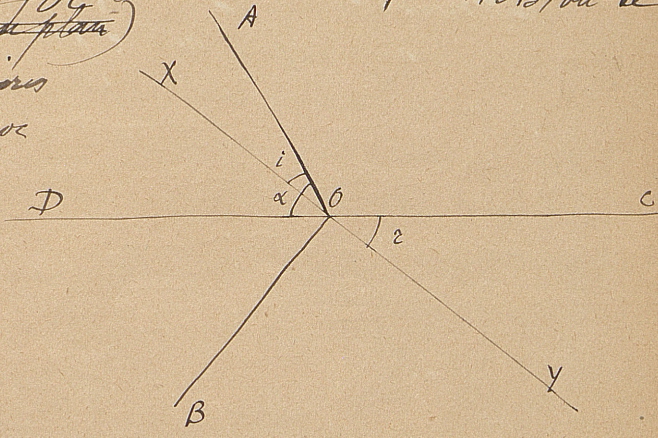
7° Si deux corps concourent avec la même vitesse (rappr. Th. 4.) et font un angle (accursus non occursus rectus) et si cet angle a une bissectrice (VB), ils se mouvront ensemble après le choc suivant la bissectrice extérieure à l'angle, et avec la même vitesse qu'auparavant (?)

8° Il s'ensuit que les angles de incidence et de reflexion ne sont pas toujours égaux ; dans notre cas où les deux corps (tout incidents concourants (mutuellement) puis réfléchis après le choc, le plus petit des deux angles (de incidence et de reflexion) est le com~~s~~plémentaire du double de l'autre.

9° Le seul angle d'incidence qui soit égal à l'angle de reflexion est l'angle de 30°.

10° Les angles de incidence et de reflexion ne doivent pas être comptés à partir de la surface où le choc a lieu, mais à partir de la droite menée par le point du choc perpend.t à la mesure de la ligne du mouvement du choqué, ou parallel.t à son côté d'arrivée.
11° Si deux corps concourent avec la même vitesse suivant des arcs de courbe semblables et égaux, ils continueront en ligne droite.
12° Si l'angle n'a pas de bissectrice (c.à.d si les lignes du mouv.t sont une droite et une courbe, ou deux courbes inégales & dissemb. et si les deux corps se choquent avec la même vitesse, ils resteront en repos. (?)
13° Les parties non choquées, la cohésion cessant, continueront le mouvement par où elles pourront.
14° Si l'on donne un angle, mais non bisécable les deux corps res[teront] en repos (sauf l'exception du Th. 11.)
15° Les forces de la nature corporelle ne donnent aucune flexion exactement géométrique, c.à.d suivant la ligne de moindre ~~résist~~ extension
16° Il n'y a pas de corps le plus durable, parce qu'il n'y a pas de mouvement le plus rapide.
17° Deux parties contiguës d'un corps sont cohérentes, si elles se pressent, ou si le mouvement du corps est tel qu'elles se poussent l'une l'autre (conversion du fondement 15.e (16) Principe de toute cohés[ion]
18° Un corps q.conque ne pousse ou ne choque que ceux à la place desq[uels] il passerait s'ils n'étaient là; et tous ceux qui adhèrent à ceux[-ci]
19° Il n'y a jamais cohésion en même temps sur toute une face d'un corps (?)
20° Un corps en repos n'a aucune cohésion.
21° Un corps discontigu ne résiste plus qu'un contigu.
22° S'il n'y a pas de vide, il n'y a pas de mouvement rectilig[ne] ni ~~de~~ mouvement qui ne revienne pas sur soi-même.
23° Dans un corps contigu la longueur (suivi la ligne du mo[uvement]) ~~est~~ aucune indifférente.
24° Dans un corps cohérent ou continu la largeur non plus n'importe pas.

La mesure des angles d'incidence et de réflexion est bizarre et bien conventionnelle, attendu qu'elle prend pour base le plan normal à la trajectoire du corps choqué au point du choc (Th. 10). Soit XY ce plan (ou ~~plutôt~~ sa trace sur le plan ~~du mouvement~~ AOB, où se ~~trouve nécessairement~~ OC ~~si tout se passe dans un plan~~)



Soient AO, BO les trajectoires des deux corps avant le choc en O, OC leur trajectoire commune après le choc.
L'angle d'incidence est : $i = AOX$;
l'angle de réflexion est :
$r = COY$,
~~par rapport~~ en considérant le corps B comme le choqué (excipiens ou praetervehens)

Soit 2α l'angle des deux trajectoires avant le choc : AOB ; OC est le prolongement de la bissectrice OD de cet angle ; chacun des angles AOD, BOD est donc égal à α. On a d'après la figure :

$$\alpha = r + i$$
$$2\alpha = 90^\circ + i$$

En éliminant α entre ces 2 équations, on trouve la relation :

$$i + 2r = 90^\circ$$

ce qui montre que l'angle d'incidence est complémentaire (en langage moderne) du double de l'angle de réflexion. C'est ~~à peu près~~ ce que dit Leibniz (Th. 8), à cela près qu'il parle de celui des deux angles qui est le plus petit (uter minor est) tandis que la proposition est toujours vraie de l'angle d'incidence

---

Remarque. Les théorèmes 7 (et 4) 8, 9, 10, 11, 12, supposent, non seulement que les deux corps ont des vitesses égales, mais encore qu'ils ont des masses égales (ce qui n'est pas exprimé)

même lorsqu'il est le plus grand ($i > r$)

On voit en même temps que les angles de incidence et de ré[illegible] ne peuvent être égaux que si : $i = 30°$ (Th. [illegible]

Il suffit de faire $i = r$ dans la formule, ~~pour trouver~~ $i + 2r =$ [illegible] pour trouver ce résultat. (Dans ce cas $AOB = BOC = COA = 120°$)

Nous avons supposé que le plan XY passait dans l'angle AO[illegible] Supposons maintenant qu'il passe en dehors c.à.d. que AO [illegible] OB soient d'un même côté de ce plan :

Par suite, AO et OC sont de part et d'autre de ce plan au lieu d'être du même côté. Les formules deviennent :

$r = \alpha + i$ ou $\alpha = r - i$

$2\alpha + i = 90°$ ou $2\alpha = 90° - i$

On voit qu'elles se déduisent des précédentes en changeant le s[illegible] de i. On devra donc considérer cet angle de incidence com[illegible] positif ou négatif suivant qu'il se trouvera, par rapport [illegible] plan XY, du même côté que l'angle r ou du côté oppo[illegible] c.à.d. suivant que l'angle AOB sera obtus ou aigu (occ[illegible] ou accursus) (1)

Moyennant cette convention de signes, le th. 8 sera en[illegible] vrai ; c.à.d. qu'on aura, en prenant la valeur absolue de [illegible]

$$2r - i = 90°$$

Il est d'ailleurs évident que dans ce cas on a toujours :

$$i < r$$

La formule de Leibniz (« uter minor ») est donc juste (toujours) dans ce cas mais non quand i est positif et supérieur à [illegible] car alors : $i > r$ (Remarque. L'égalité des angles n'a lieu que si i [illegible] (a pu être aussi) pour $i = -30°$, $r = 60°$.

(1) L'angle de incidence est nul quand AOB est un angle droit ([illegible] de l'accursus rectus)

Hegel, Logique, tome II :
Première Partie : la Science de l'Être :
A. Qualité. B. Quantité.
§ XCIX : a. La quantité pure.

La quantité est l'être pur où la déterminabilité n'est plus posée comme ne faisant qu'un avec l'être lui-même, mais comme indifférente & détruite.

1° Le mot grandeur n'exprime pas d'une manière adéquate la quantité, mais seulement la quantité déterminée.

2° Les mathématiciens définissent ordinairement la grandeur « ce qui peut être augmenté ou diminué ». Bien que cette définition soit défectueuse, parce qu'elle contient le défini, cependant les déterminations de la grandeur y sont représentées comme indifférentes à la chose, comme pouvant changer en intensité ou en extension, sans que la chose (une maison, la couleur rouge, par ex.) cesse d'être une maison, ou la couleur rouge.

3° L'absolu est la quantité pure ....

§ C : — La quantité, dans ce rapport immédiat avec elle-même ou dans cette détermination d'égalité avec elle-même qui a été posée par l'attraction, est quantité continue ; mais comme d'un autre côté elle contient la détermination de l'un, elle est

quantité discrète. Mais la quantité continue est, en même temps, quantité discrète, parce qu'elle n'est que la continuité de plusieurs, et la quantité discrète est en même temps quantité continue, parce que les uns qui forment la discrétion sont identiques, et constituent par conséquent une unité. D'où il suit

1° Que la grandeur discrète et la grandeur continue ne doivent pas être considérées comme formant deux espèces distinctes de grandeur. Car elles sont deux déterminations d'un seul et même tout;

2° Que l'antinomie de l'espace, du temps, et de la matière touchant la divisibilité infinie ou l'indivisibilité de leurs éléments, vient de ce que, dans le premier cas, la quantité est considérée comme continue, et dans le second, comme discrète. Si l'on ne pose le temps, l'espace, etc. qu'avec la détermination de la quantité continue, ils sont divisibles à l'infini. Si on ne les pose qu'avec la détermination de la quantité discrète, l'on arrivera à une dernière division, car ils seront composés d'unités indivisibles. Mais l'une des deux déterminations est aussi incomplète que l'autre.

(Voir la Grande Logique p. 216 sqq.)

b. Quantum.

§ CI. — La quantité posée avec une déterminabilité essentielle, qui exclut toutes les autres, c'est le quantum ou quantité limitée.

§ CII. La quantité limitée reçoit sa détermination et son développement complets dans le nombre (Zahl) qui a pour éléments l'un et qui contient, comme moments qualitatifs, la quantité discrète dans les nombres particuliers (Anzahl) et la quantité continue dans l'unité (Einheit.

[Déduction des 3 opérations arithmétiques.]

c. Le degré.

§ CIII. La limite est devenue identique avec la ~~quantité~~ totalité du quantum. Par conséquent, comme déterminabilité multiple la quantité constitue la grandeur extensive; comme déterminabilité simple, la grandeur intensive ou le degré.

Remarque. Ce qui distingue la grandeur continue et la grandeur discrète de la grandeur extensive et de la grandeur intensive, c'est que les premières s'appliquent à la quantité en général, et les secondes à ses limites.

De même que la quantité continue et la quantité discrète, la quantité extensive et la quantité intensive ne sont pas deux espèces de quantités, dont l'une contiendrait une détermination qui ne se trouverait pas dans l'autre. La grandeur extensive est en même temps une grandeur intensive, et réciproquement.

§ CIV : C'est dans le degré que se réalise la notion de la quantité déterminée. Le degré, c'est la grandeur qui est dans un état de simplicité et d'indifférence, de telle façon cependant que la détermination qui la fait une quantité limitée, elle la trouve hors d'elle, dans une autre grandeur. Il y a ici une contradiction, qui consiste en ce que ~~sa~~ la limite indifférente et existant pour soi est l'extériorité absolue. Le degré est une quantité immédiate qui appelle immédiatement son contraire, une médiation, et qui va au delà de la quantité que l'on a posée. C'est là ce qui constitue le progrès infini quantitatif.

Remarque ...... Par conséquent, le quantum non-seulement peut être augmenté ou diminué à l'infini, mais d'après sa notion, il doit toujours aller au-delà de lui-même. Le progrès infini est ~~un~~ le retour irréfléchi d'une seule et même contradiction, qui, dans la quantité déterminée, se réalise sous la forme de degré. L'on peut au fond se dispenser de se représenter cette contradiction sous la forme d'un progrès infini. Et à cet égard nous rappellerons le mot si juste de Zénon dans Aristote « qu'il n'y a pas de différence entre dire une chose une seule fois et la répéter toujours. »

(cf. Grande Logique, livre I, part. 2, p. 293-379, une exposition critique du calcul de l'infini.)

Hermann Schwarz : Versuch einer Philosophie der Mathematik, verbunden mit einer Kritik der Aufstellungen Hegel's über den Zweck und die Natur der höheren Analysis. Halle 1853.

§ CV: Cette propriété qu'a la quantité d'être en elle-même et hors d'elle-même fait sa qualité. Par là se trouvent réunis l'extériorité, c.à.d. le quantitatif, et l'être pour soi, ou qualitatif.

La quantité ainsi posée forme un rapport quantitatif, rapport où elle est à la fois quantité immédiate, (exposant) et quantité médiate, c.à.d. en rapport avec une autre quantité. Car les deux termes d'un rapport n'ont pas une valeur immédiate, mais une valeur qui leur vient de leur rapport même.

§ CVI: Les deux termes du rapport sont encore des quantités immédiates, et les deux déterminations, la qualité et la quantité, ne sont liées que par un rapport extérieur. Mais comme, au fond, la quantité contient deux éléments, un rapport avec soi-même et un rapport extérieur, ou l'être pour soi et l'indifférence à toute détermination, elle est devenue la mesure.

§ CVII. La mesure est la quantité qualitative, et d'abord elle est une quantité immédiate qui a une existence déterminée, ou une qualité.

§ CVIII. Comme la mesure réunit la qualité et la quantité dans une unité immédiate, la différence de la qualité et de la quantité se produit aussi dans la mesure d'une manière immédiate. La quantité

spécifique est, d'une part, une pure quantité, et elle peut être diminuée ou augmentée sans que la mesure, en tant que règle, soit pour cela détruite, et d'autre part, le changement de la quantité entraîne le changement de la qualité.

§ CIX: Le changement de quantité qui fait qu'une mesure perd la détermination de sa qualité, amène d'abord la suppression de la mesure. Mais comme l'autre rapport quantitatif, auquel donne naissance cette suppression, est aussi un rapport qualitatif, la suppression de la mesure produit une mesure nouvelle. Le passage de la qualité dans la quantité, et de celle-ci dans la première, peut être aussi représenté comme un progrès infini, où la mesure se trouve à la fois supprimée et rétablie.

§ CX: Ce qui a lieu au fond de ce mouvement, c'est que la forme immédiate de la mesure, comme telle, est détruite. La qualité et la quantité elles-mêmes s'y trouvaient d'abord dans un état immédiat, et la mesure n'était que leur identité relative. Mais dans la mesure se produit la nécessité de la suppression de la mesure, et cette suppression, qui est la négation de la mesure, amène l'unité de la qualité et de la quantité, aussi que l'unité réfléchie de la mesure elle-même.

Cf. Grande Logique, livre I, § III, ch. I; Philosophie de la Nature, § CCXLVII sqq.

§ CXI. L'infini, l'affirmation, en tant que négation de la négation, contient maintenant au lieu des termes abstraits, l'être et le néant, l'un et le multiple etc., la qualité et la quantité. A. D'abord, la qualité est passée dans la quantité (§ XCVIII) et la quantité dans la qualité (§ CV), et, par conséquent, elles se sont produites comme des négations. B. Dans la mesure qui fait leur unité, elles se sont d'abord différenciées, et l'une n'est que par l'intermédiaire de l'autre. C. Enfin, la forme immédiate de cette unité disparaît, et par là cette unité se trouve posée, telle qu'elle est en soi, c.à.d. comme formant un rapport simple avec elle-même, rapport qui enveloppe et supprime à la fois l'être, ainsi que ses formes. L'être immédiat, qui, dans la négation de lui-même, a posé un moyen terme pour se mettre en rapport avec lui-même, moyen qui s'est effacé pour produire ce rapport, et par conséquent un nouvel état immédiat, cet être est devenu l'essence.

Deuxième Partie de la Logique.

La science de l'essence.

Renouvier

(Critique de l'infini)

Cauchy – Moigno.

Evellin.

l. Renouvier.

Tableau des catégories.

atégories	Thèses	Antithèses	Synthèses
lation	Distinction	Identification	Détermination.
nbre	~~Point (limite~~ Unité	~~Espace (intervalle)~~ Pluralité	~~Étendue~~ Totalité.
ition	Point (limite)	Espace (intervalle)	Étendue
cession	Instant (")	Temps (")	Durée.
lité	Différence	Genre	Espèce.
venir	~~Ca~~ Rapport	Non-rapport	Changement.
salité	Acte	Puissance	Force
nalité	État	Tendance	Passion
onnalité	Soi	Non-soi.	Conscience.

Tableau des facultés.

atégories.	Fonctions humaines.
	1°. Intelligence
	A. Entendement.
tion	Comparaison, attention, réflexion
ntité	Numération.
ition	Imagination
cession	Mémoire
venir.	Pensée ; série de la pensée.
	B. Raison
lité.	Raison, signification, jugement, raisonnement.
	2e. Cœur et volonté.
lité.	Passion, instinct, habitude
nalité.	Volonté, effort.
onnalité.	Liberté.

Des antinomies mathématiques de Kant.

Le nerf des thèses est la contradiction inhérente au nombre infini.
M. Renouvier n'attribue pas la même valeur aux antithèses qu'aux
ses: les premières sont contradictoires, les secondes ~~sont~~ seulement
concevables* ce qui ne veut pas nécessairement dire faux*.
*compréhensibles

Le principe de contradiction s'applique à la nature, les ~~thèses~~ antithèses
finitistes sont fausses – Quant à l'inconcevabilité des thèses,
provient du pouvoir illimité de l'imagination, de
universalité indéfinie de la faculté représentative.

Hamilton reconnait la contradiction du nombre infini; et pose
comme également inconcevables la thèse et l'antithèse de chaque
antinomie, et cependant se croit obligé par le principe de contradic-
tion à admettre l'une ou l'autre comme vraie; tandis que
R. les déclare toutes deux fausses, en réduisant le monde à
l'apparence. — Hamilton admettant l'absolu ~~et l'infini~~
par foi théologique; or l'absolu exige le commencement de la
création du monde, donc il contredit l'infini.

St. Mill n'a pas tenu compte, en traitant de l'infini de quantité,
de la différence entre l'infini actuel, ou sommé, et l'infini purement
potentiel, ou puissance indéfinie de multiplication et de division
un objet d'imagination. »

R. distingue toujours l'éternité écoulée, qui est contradictoire,
qu'elle est donnée comme interminable et en même temps terminée;
l'éternité à venir, qui est une possibilité indéfinie de prolonger
l'imagination en temps fini quelconque.
La quantité infinie, c.à.d. plus grande que toute quantité donnée,

implique contradiction en tant que quantité donnée, c
est donné est déterminé, et par conséquent n'est pas sans-
Par conséquent, l'infini paraît dans la faculté ou puissance
et intellectuelle, appliquée à des possibles, et doit par là
exclu des données et des objets réalisés, passés ou actuels de

— La faiblesse de St. Mill sur la question de l'infini vient de ce
distingue pas nettement les divers inconcevables, et n'affirme
l'impossibilité réelle du contradictoire (à cause de son empi
Il est porté à confondre l'inconcevable par contradiction
l'inconcevable par manque d'habitude ou d'association (
les antipodes.)

— Il n'y a pas de quantité plus petite que toute quantité
car si cette quantité était donnée, par hypothèse, ses parties
également données, en vertu de la division infinie qu'on
et par conséquent ~~elle~~ ne serait pas la plus petite, ce qui
Tandis que Hamilton déclarait la thèse et antithèse incon
Mill les trouve toutes deux concevables pour l'infiniment
mais il trouve la limite inconcevable du côté de l'infiniment
(M R remarque que Mill, en ruinant la valeur du principe de co
puisque l'expérience ne peut garantir une association indissol
ouvre la porte au mysticisme métaphysique ou théologique

— Spencer confond toutes les sortes d'inconcevables, et pose
criterium « l'inconcevabilité de la négative » sans définir
inconcevabilité il s'agit. — Le fait présent est tel, que sa né
est inconcevable: au fond, ce criterium est un criterium
Spencer constate qu'il y a des choses que personnellement
peut concevoir. Son criterium est stérile, car il se borne à
le fait de conscience tant qu'il existe.

Leibniz, qui n'admet pas le nombre infini (démontré impossible par Galilée) admet l'infini actuel dans le monde, aussi bien l'infiniment grand que l'infiniment petit.

« Je crois qu'il n'y a aucune partie de la matière qui ne soit, je ne dis pas divisible, mais actuellement divisée ; et par conséquent la moindre parcelle doit être considérée comme un monde plein d'une infinité de créatures différentes. » (Dutens, II, 243)

« De ce que dans la matière il y a partout des monades, principes de l'unité substantielle, il s'ensuit que l'infini est donné en acte, car il n'y a ni partie, ni partie de partie qui ne contienne des monades. » (Dutens, II, 266 ; cf. 298)

Leibniz croit résoudre l'Achille en alléguant qu'un espace divisible sans fin se passe et s'épuise dans un temps également divisible sans fin. (Dutens, II, 238) A quoi M. Renouvier répond que cette double infinité parallèle n'est pas plus facile à épuiser ou passer que l'infinité simple.

« Les arguments contre l'infini en acte supposent que, dans le cas où l'on admettrait un tel infini, un nombre infini serait donné ; et encore, que tous les infinis sont égaux. Mais il faut savoir qu'en réalité un agrégat infini n'est pas un seul tout, n'est pas doué de grandeur, ne consiste pas en un nombre. A parler exactement, il ne faut pas dire qu'il y a un nombre infini, mais bien qu'il y a plus de choses qu'on n'en peut exprimer par aucun nombre ; de même, au lieu d'une droite infinie, il faut parler d'une droite prolongée au-delà de toute grandeur assignable, tellement que la droite soit toujours plus grande. » (Leibniz, lettre à Des Bosses)

« En voilà assez... pour donner satisfaction aux arguments [contre] l'infini actuel, arguments qui peuvent porter aussi à leur [tour] contre l'infini potentiel; car on ne saurait nier que les natu[res de] tous les nombres possibles ne soient données, au moins da[ns la] pensée divine, et qu'ainsi la multitude des nombres ne soit [...]

(Dutens, II, p. 267; cf. p. 272)

Polémique touchant le nombre infini:

Leibnizii et Johannis Bernoullii commercium philos[ophicum] et mathematicum, Lausannæ et Genevæ, 1745 (I [...]

« J'accorde une multitude infinie, mais cette multitude [...] par un nombre ou un tout. Elle signifie seulement qu'il [y a] plus de termes qu'il n'en peut être désigné. C'est ainsi qu['une] multitude est donnée, enveloppant tous les nombres, mais [cette] multitude n'est ni un nombre ni un tout. »

Objection de M. R: que la série des nombres soit sans fin [...] conçoit, et cela est, si les nombres ne sont que la série des [...] Mais que la série des monades données soit corrélativem[ent] sans fin, cela est absurde: des unités données forment [un nombre] et un tout, quelque immense qu'on le suppose.

Extrait de la Critique philosophique, tome X (1876-2.)

[Re]nouvier : Les labyrinthes de la métaphysique. L'infini et le [co]ntinu. — Les mathématiciens.
(Critique philosophique, t. XI, 1877, 1.) p. 26.

[Lei]bniz : « Le continu *aussi implique-t-il une infinité nécessaire, d'après la notion même* mathématique consiste en une pure possibilité, [co]mme les nombres. » (Substitution du potentiel à l'actuel)

[...] admets pas plus de grandeurs infiniment petites que [d']infiniment grandes, je tiens les unes et les autres pour des [m]anières abrégées de parler, dans le cas des fictions de l'esprit, [qui] servent au calcul. » (Dutens, II, 305, 267.)

« On conçoit un dernier ~~terme~~ *tel que sont les racines imaginaires en algèbre*, un nombre infini ou infiniment [peti]t, mais tout cela ne sont que des fictions. Tout nombre est fini [et a]ssignable, toute ligne l'est de même, et les infinis ou infiniment [pe]tits ~~qui~~ n'y signifient que des grandeurs qu'on peut prendre ~~pour~~ [aus]si grandes ou aussi petites qu'on voudra pour montrer qu'une [erreu]r est moindre que celle qu'on a assignée, c'est-à-dire qu'il n'y [a a]ucune erreur. » (Théodicée n° 70.)

[L]es incomparables pouvant être pris aussi petits qu'on veut dans [les r]aisonnements géométriques font l'effet des infiniment petits [rigou]reux, puisqu'un adversaire voulant contredire à notre [énon]ciation, il s'ensuit par notre calcul que l'erreur sera moindre [qu'a]ucune erreur qu'il pourra assigner, étant en notre pouvoir [de pre]ndre cet incomparablement petit assez petit pour cela, puisqu'on [peut t]oujours prendre une quantité aussi petite qu'on veut... C'est [sans] doute en cela que consiste la démonstration rigoureuse du calcul [infini]tésimal dont nous nous servons... » (Lettre à Varignon
Dutens t. III, p. 370.)
Cf. Dutens, t. I, p. 267.)

Pour M Renouvier, le calcul infinitésimal est une méthode d'approximation indéfinie.

Deux reproches adressés à la méthode des limites :

1° Considérer comme existants des rapports entre des g[illegible] évanouissantes qui n'existent plus à la limite ;

2° Considérer comme atteintes (dans l'évaluation de la [illegible] des courbes, par exemple) des limites qui ne peuvent être att[illegible] identifier les courbes à des polygones contrairement aux déf[illegible] regarder comme des nombres effectifs les résultats impos[illegible] d'opérations définies comme interminables –

– On a essayé de perfectionner la méthode en substituan[illegible] définitions verbales aux identifications anciennes : on dit [illegible] J'appelle longueur d'une courbe la limite vers laquelle ten[illegible] longueur de tel périmètre polygonal variable. Mais ... définitions nominales ont pour effet de masquer les diff[illegible] et nullement de les résoudre.

Sur la rectification des courbes. La limite géométrique d[illegible] polygone n'est pas un polygone, on ne peut donc la mesur[illegible] un polygone. D'autre part, la mesure du polygone a un[illegible] mais cette limite n'est pas la mesure d'un polygone, puisq[illegible] polygone possible est avant la limite.

Impossibilité de concevoir les rapports entre incommen[illegible]

– Les aires et longueurs curvilignes ne sont mesurables que [illegible] un parti pris de définir nominalement ces aires ou ces lo[illegible] par des limites de polygones – M R admet que cette façon de [illegible] est irréprochable

Ne faut pas dire qu'~~on~~ en mesurant un polygone on donne une
eur approchée de la longueur de la courbe où il est inscrit ;
isque la valeur vraie est inassignable et in-mesurable ;
faut dire que c'est le polygone (seule figure véritablement
urée et mesurable) qui est approché.
Le rapport de la circonférence au diamètre est un nombre incom-
surable. Il faut dire : est incommensurable, n'est point un nombre,
rapport à la rigueur, enfin n'existe pas (!)
L'approximation arithmétique des mesures géométriques, dans les
d'incommensurabilité, ne se rapporte pas à des valeurs fictives,
la fiction est contradictoire, inconciliable avec les notions claires
pport et de nombre ; mais cette approximation porte en réalité
les figures à substituer à certaines proposées.
Le « nombre π, » sous ce point de vue, n'est plus un nombre
(!) mesurant la longueur d'une circonférence qui a pour
mètre l'unité linéaire, mais bien un nombre indéterminé (!)
bole de la longueur du périmètre d'un certain polygone inscrit,
l'apothème diffère du rayon de moins que d'une longueur
nable, quelque petite qu'on l'assigne.
Leibniz y répondait (à l'objection que son calcul n'était qu'approché)
défi théorique ... d'assigner une erreur commise quelconque
que celle-ci étant assignée, et quelque petite qu'on la supposât,
urrait aussitôt prouver qu'on l'assignait trop grande. On n'a
voulu comprendre cette espèce de réduction à l'absurde ; elle nous
le pourtant rigoureuse, plus rigoureuse qu'elle n'eût pu être
posant la pensée d'une approximation indéfinie ...

Malebranche admet des infinis actuels, et des rapports fini[...]
(Méditations chrétiennes IV, art. 11. Rech. de la vérité, livre [...]

Bordas-Demoulin, Le cartésianisme ou la véritable rénov[ation] des sciences (1843); Théorie de la substance; Théorie de l'in[...]

Lettre de M. Boirac (n° du 26 avril 1877)

Le nombre infini est sans doute contradictoire; ~~tout [...] se [...] n'agit que de choses possibles, on conçoit que l'esprit puisse sans fin~~. Mais s'ensuit-il qu'il ne puisse exister dans la [...] des collections qui ne forment pas de nombre? Ces multitu[des] seraient inépuisables et sans nombre; elles ~~se~~ seraient actuellement [...]. Il n'y a pas, semble-t-il, de contradiction entre pluralité et [...]

— Réponse de M. Pillon: — Le nombre est la loi de toute représen[tation] de toute pensée. Toute pluralité est un nombre, inconnu peut-[être] mais donné dans sa totalité. L'esprit[1] découvre le nombre, [ne le] crée point. — Une collection indéterminée est ~~un~~ le nombre en qu[...] inconnu, mais connaissable. — Elle ne devient pas subjective [...] qu'elle était, au moment où elle est nombrée —

Pourquoi la série des événements passés n'est-elle pas innom[brable]? Parce que chaque événement passé forme un tout réel, une u[nité]. La série des événements futurs, série de purs possibilités, [est] indéfinie; la série des événements passés, série de réalit[és] est nécessairement finie: car toute pluralité ou collection composé de unités réelles est un nombre.

(1) Dans l'hypothèse d'un infini actuel, l'esprit trouverait devant lui [de quoi] former indéfiniment des nombres, de même qu'il trouve ordinairement [dans] les collections finies de quoi former des nombres jusqu'à une certai[ne ...]

Renouvier, ap. Critique philosophique, t. XI; 1877, 1. (10 mai; n° 15.)

Note sur l'infini de quantité.

Définitions.

1. J'appelle chose donnée une chose quelconque susceptible d'être distinguée des autres de même ou de différente nature dont l'existence peut se définir, soit dans l'espace, soit dans le temps, soit simplement dans la pensée.

Une collection ou multitude donnée est une coll. ou mult. de choses données.

2. J'appelle infinie actuelle une collection donnée qcque dont on supposerait que les parties distinctes ou éléments, considérés dans leur assemblage numérique, ne répondent pas à un certain nombre n, et cela quel que soit n, ou à quelle grandeur qu'il puisse atteindre.

Par opposition à l'infini actuel, l'infini des possibles est ce qu'on nomme l'indéfini.

3. S'il s'agit de la suite des nombres abstraits: 1, 2, 3, ... je l'appelle infinie actuelle et non pas seulement indéfinie, dans la supposition où, étant conçue par une intelligence dont l'acte d'énumération effective serait, par hypothèse, sans limites, cette suite serait représentée dans cette intelligence tout à la fois comme une collection effectuée (donnée), et comme un assemblage de termes ne répondant pas à un certain nombre n, quelque grand que fût n.

Propositions

1. Une collection donnée *in concreto* est toujours telle, qu[e] d'une loi de l'entendement, sans laquelle l'exercice de la sens[ibilité et] toute expérience sont impossibles, on puisse distinguer, nombr[er,] assembler les objets de cette collection, et cela, soit que la [...] doive se terminer ou ne puisse pas se terminer effectivement [...]

2. Dans l'hypothèse où la numération serait intermina[ble ...] toujours établir le parallélisme de la suite des concrets des[...] la suite des nombres abstraits 1, 2, 3, ... puisque ces ab[straits] correspondent à ces concrets chacun à chacun, nécessairem[ent ...] la suite de ces abstraits est indéfinie et ne peut faillir, s[i] la multitude de ces concrets s'étend.

[Les nombres ne sont que de purs *possibles*, en tant qu'ind[éfinis ...] il y a contradiction à les supposer tous donnés ... Le conce[pt de] possibilité indéfinie est ce qu'il y a de réel dans l'idée de l'[...]

3. Il résulte de la proposition précédente que, au cas où [l'on] pourrait démontrer que l'hypothèse de l'infinité actuelle [de la suite] des abstraits est une hypothèse contradictoire en soi, il sera[it démontré] par là même que l'hypothèse de l'infinité actuelle de la s[uite des] concrets est une hypothèse contradictoire en soi. En effe[t, le nombre] des concrets ne peut devenir actuel que celui des abstraits [ne] devienne pareillement. Si le premier s'accomplissait sans [le second, ...] si les deux suites n'arrivaient pas à se clore ensemble, a[près avoir] constamment correspondu, c'est, dans notre supposition, [la suite] des abstraits qui, ne pouvant être donnée *ad integrum*, [...] girait au delà de l'autre, et alors la suite des concrets se[rait égale] à un certain nombre *n*, contrairement à la définition [...]

42

4. L'hypothèse de l'infinité actuelle de la suite des abstraits
contradictoire en soi. Cette impossibilité du nombre infini,
comme on s'exprime qqufois, peut se démontrer de plusieurs manières.
voici une très-simple:
Si la suite des abstraits: 1, 2, 3, etc. est infinie actuelle, elle
renferme actuellement autant de termes pairs qu'elle renferme
solument de termes, attendu que chacun de ses termes, quel
il soit, peut être doublé, et que son double est un nombre pair,
cessairement existant dans la suite de tous les nombres. Mais
outre des pairs, cette suite renferme des impairs en nombre égal
infini. Donc cette suite renferme plus de termes et infiniment
de termes qu'elle n'en renferme, ce qui est une contradiction
terminis.

5. L'infinité actuelle de toute collection ou multitude de
données, devant suivre le sort de l'infinité actuelle de la suite
nombres abstraits, ne peut être supposée sans absurdité. D'où
it que des êtres ou phénomènes quelconques susceptibles d'être
gués les uns des autres dans l'espace, dans le temps, dans la
qu'elle pose et les multiplie idéalement, ne peuvent être supposés
és, sans que leur ensemble soit supposé numériquement déter-
en soi, encore que les moyens de les nombrer nous fassent défaut.
La série écoulée des phénomènes distincts de l'univers a donc eu
ommencement, sans quoi leur somme actuellement effectuée
t un infini actuel, et leur extension et dissémination effectives,
qu'on les envisage dans l'espace ou dans le temps, sont toujours
que tous ceux qu'il est possible de concevoir existants et distincts
ent par leur réunion en tant qu'unités un nombre déterminé.

Extrait de la Revue philosophique, tome IX, page 67

Si des phénomènes ou des choses quelconques forment une s[uite]
interminable en se distinguant les unes des autres, elles [corres-]
pondent nécessairement une par une aux termes de la suite [des]
nombres abstraits 1, 2, 3, 4... également interminable. Si la
première de ces suites pouvait se clore de manière à former
synthèse achevée, une unité de totalité, il faudrait que n[ous]
puissions nous représenter la seconde comme également a[chevée]
formant, sous le nom de nombre infini, une synthèse ach[evée]
une unité de totalité. Autrement, il est clair que la série
se poursuivant toujours, nous refuserions à la série des [choses]
le droit de s'arrêter et de se fermer, vu la correspondanc[e]
ci-dessus. Toute la question dépend donc bien de la possib[ilité ou]
de l'impossibilité du nombre infini. Le nombre infini actu[el est]
contradictoire in adjecto, par la raison que l'idée même d[u nombre]
implique la faculté d'augmenter un nombre donné qu[elconque]
D'où l'infini potentiel exclusif de l'infini actuel; il [s'ensuit]
que la même contradiction ~~qui~~ existe entre une suite de [termes]
sans fin et leur synthèse accomplie, qui supposerait [la suite]
épuisée.

Suivant M Lotze, c'est l'infinité donnée ou actuell[e]
de pousser aussi loin qu'on le veut la synthèse des unit[és]
moi, c'est l'infinité potentielle du procédé de l'esprit dans [le]
qui explique, mais n'autorise point la supposition d'un[e]
antérieure et supérieure, enveloppant tous les possibles, à m[oins]
ne comprenne bien que cette donnée est l'esprit lui-même
série. La contradiction est le fait du philosophe qui veut q[ue]
soit donnée sans être close, et non de celui qui soutient que [ne pouvant]
être close, elle ne peut être donnée

Revue philosophique, tome IX.

L'infini actuel est-il contradictoire ?

H. Lotze :

Si nous continuons la série des nombres par l'addition de l'unité, il est évident que nous ne pouvons trouver l'infiniment grand comme un nombre, ce qui contredirait la définition même de l'infini.

La certitude que nous avons de la valeur ou de la vérité simultanée de tous les termes de la série jusqu'à l'infini, voilà précisément en quoi consiste l'infinité donnée de la série. C'est seulement par une méprise assez grossière que l'on peut prendre cette infinité de la série pour un nombre infini, qui, s'il pouvait être atteint, la rendrait close et finie.

Pour prouver que dans l'enchaînement de nos idées il peut se présenter tel cas où nous devrions reconnaître l'infini comme posé au présent dans les choses, comme possédant la même réalité que.. les grandeurs finies de même espèce, j'avais parlé de la tangente (trig.) dont la valeur devient infinie lorsque l'angle est droit et la sécante parallèle à la tangente ; mais j'ajoutais que cette longueur infinie reste immesurable par synthèses successives de longueurs finies ..... Elle est infinie et non indéfinie ; ~~car~~ la tangente serait indéfinie si l'on ne savait au juste quelle longueur lui attribuer, si l'on ne savait s'il y a ou non un nombre pour la mesurer. Mais elle diffère de la tangente de 0°, et M. Renouvier avoue lui-même qu'elle n'a plus de mesure, parce qu'elle a une longueur infinie dont aucun nombre, quelque grand qu'il soit, ne peut avoir le rapport avec l'unité de longueur.

M. Renouvier ramène d'abord l'infinité de l'espace et du
au nombre infini : puis il fait ressortir la contradiction de
« l'idée même de nombre implique la faculté d'augmenter un
donné quelconque ; d'où l'infini potentiel, exclusif de l'infini
M. Lotze considère la série potentielle des nombres comme
tout actuellement donné. Un tel tout peut-il différer
infini, alors que chaque terme de la série énonce à la fo
particulière et le nombre des termes comptés jusqu'à lui
dire que si le tout est une infinité donnée, comme les termes
inépuisables jusqu'à la fin de ce qui peut être donné, je suis
supposer un dernier, et celui-là nombrera ce tout et cette
Ce dernier terme est-il impossible vu la nature de la série ?
somme infinie est elle-même impossible en tant que donnée
les termes et les sommes restent constamment identiques
Pour la tangente de 90°, dont la valeur est infinie, il faut
le point de vue géométrique, auquel elle est une droite indé
le point de vue du calcul, où la tangente n'a plus de
parce qu'elle a une longueur indéfinie dont aucun nombre
grand qu'il soit, ne peut exprimer le rapport avec l'unité de
Ce rapport n'existant plus, il n'y a plus de nombre ni fini
— On ne peut attribuer aucune valeur à cette tangente
ne peut lui en attribuer aucune qui ne fût erronée dès
qu'elle serait déterminée ; et ce cas est complètement diff
celui de la tangente de 0°, qui a une valeur déterminée,
— On peut parler d'une valeur infinie, pourvu qu'on n'y voie qu
ou un symbole. L'erreur n'apparaîtrait que si l'on croyait qu
valeur possède la même réalité que les grandeurs finies de même
parce que cette réalité de l'infini comme donné au présent
ne pourrait signifier pour moi que la quantité infinie actu

ept leçons de physique générale, par Augustin Cauchy | R. 30828.

c appendices : sur l'impossibilité du nombre actuellement infini ;
l'antiquité de l'homme ;
la science dans ses rapports avec la foi ;
par l'abbé Moigno.

Gauthier Villars, 1868.)

Préface : Le but de ce petit opuscule est de lui (C.) donner un bon souvenir, de continuer son apostolat de savant et de chrétien...

uchy émigra en 1830, accepta en 1832 la chaire de physique sublime ée pour lui à Turin par S. M. le roi de Sardaigne, et vint à ague en 1833, appelé par le roi Charles X pour enseigner les ences au jeune comte de Chambord.

Il ne voulut pas reconnaître Louis Philippe pour son roi, refusa serment de fidélité en 1851, en fut dispensé en 1852.

Sa foi. — C'était vraiment la foi du charbonnier, la foi vive et forte du moyen âge .... Ce n'était pas un simple chrétien, mais un apôtre, asseur ou pêcheur d'hommes. (Né en 1789, mort en 1857.)

leçon : Tout nombre est fini ; toute multitude d'êtres est finie. uchy démontre l'impossibilité du nombre actuellement infini, mme Galilée, par la considération des nombres carrés.

amène comme M. Renouvier, une multitude d'objets à un nombre angeant les objets en ordre linéaire et en leur faisant correspondre ite des nombres entiers.

argument s'applique à des séries successives comme aux séries ltanées. Ainsi, non-seulement le nombre actuel des étoiles est mais le nombre de toutes celles qui ont existé est fini ; de même mbre des hommes qui ont existé, le nombre des révolutions terrestres etc. « Ainsi la science nous ramène à ce que la foi nous enseigne. »

chy cite le P. Gerdil.

L'infinité, l'éternité sont du

«En résumé, Dieu seul est infini; hors de lui tout est fini.»
«L'homme est immortel, mais non pas éternel. L'éternité qu'il a
n'est qu'une durée qui croît continuellement et au delà de
limite assignable. Mais si, à un instant quelconque de cette
il arrête sa pensée sur le temps écoulé depuis qu'il a commencé
jamais il ne pourra dire que ce temps soit devenu infini.»
Cauchy cite les Écritures comme «le premier et le plus ancien de
les livres.» — Préoccupation constante de s'accorder avec le
sacrés, et de rendre vraisemblables même les miracles de la B

5e Leçon «Il y a même dans la nature, des vérités qui surpassent notre intell
et des mystères qu'en ce monde il n'est pas donné à l'homme de
L'étendue et la figure sont des attributs des corps. — L'espace
pas par lui-même; Dieu réalise l'espace en créant les corps
L'espace réel est fini. L'atome réalise le point mathématique
Cauchy semble mesurer les longueurs rectilignes par le nombre d'a
qu'elles contiennent. Il définit d'autre part la longueur d'un
comme limite, etc. — Comment concilie-t-il ces 2 défini
Comment concilie-t-il son atomisme avec les incommensurables.
Les volumes sont proportionnels aux nombres d'atomes qu'ils con

Relativité des dimensions: si les longueurs variaient toutes da
rapport, les angles restant les mêmes, rien ne serait changé.

Cauchy n'admet pas l'infinité de l'espace parce que l'in
appartient à Dieu seul, et qu'elle est indivisible.

Affirmer l'existence d'un point math. c'est affirmer la poss
la création d'un atome par Dieu en ce point.

«Le triangle, qui est pour nous le symbole du seul être nécessa
Dieu unique en trois personnes, est le fondement de tou
nation de l'espace, car tout point peut être rapporté à 3 p. fixe
«On pourrait dire que les points mathématiques, les distances
et les volumes subsistent à la manière des nombres. Ainsi, une d
réalisée par la création de 2 atomes, comme le nombre cinq
réalisé par la création de 5 objets divers...»

s distances des atomes sont déterminées par leur attraction ou
pulsion mutuelles, en ce sens qu'elles cessent d'être relatives et
viennent absolues : car pour une distance déterminée la force
vient nulle (en passant de la répulsion à l'attraction.)
~~On ne peut admettre la création simultanée d'un n. infini d'atomes~~
Pour obtenir un nombre infini d'atomes coexistants, il suffirait
d'admettre la création simultanée de tous les atomes que peut
éer la toute puissance divine. Mais cette dernière hypothèse est
idemment absurde et entraîne une contradiction manifeste
ar, si elle était admise, la toute puissance divine se trouverait
en q.que sorte épuisée, et Dieu ne pourrait plus l'exercer en créant de
nouveaux atomes, ce qu'il serait ridicule de soutenir. »

« Nous ajouterons ici une dernière remarque :
L'espace occupé par l'univers fut réalisé, comme nous l'avons déjà
dès le premier jour de la création, à l'instant où la voix de l'Eternel
jaillir de toutes parts la lumière, ce fluide subtil qui remplit les espaces
tes et pénètre tous les corps. »

Fin

gno : « Le nombre actuellement infini est impossible ; tout nombre
est essentiellement fini. La suite des nombres est indéfinie. »

résulte « d'une part, que les témoignages du Seigneur sont croyables au-delà de ce que nous aurions pu désirer, testimonia tua credibilia facta sunt nimis ; que le dogme capital de la création est un simple corollaire de la science des nombres ; que l'athéisme est la négation de l'évidence mathématique, etc ; de l'autre part, que l'incrédulité n'est pas dans l'intelligence, mais dans la volonté ou le cœur, qu'elle est par conséquent inexcusable ; qu'elle est moins un malheur qu'une faute. »

Govi répond : « L'univers n'est point une somme d'unités séparées et séparables, il n'est point discontinu ; il n'est donc pas un nombre et peut donc être infini. »

Moigno réplique : « Les rêveries de continu, d'infini de M. Govi, ne sont que des extravagances ... de l'être infini de nos dogmes chrétiens. »

Cauchy, fin de la 2e leçon : (le savant)

« Premièrement, il doit soumettre les fruits de ses veilles à l[…]
et à l'autorité des autres savants .....

» Secondement, il doit rejeter sans hésiter, toute hypo[…]
serait en contradiction avec les vérités révélées. Ce point […]
je ne dirai pas dans le intérêt de la religion mais dans l[…]
des sciences puisque jamais la vérité ne saurait se contred[…]

Evellin, Infini et quantité. Paris, Gr Baillière, 1880.

Deuxième partie: L'infini dans la nature

Ch. I: L'idole de l'infiniment petit et la matière.

§ II: Contradiction du nombre actuellement infini:

Qui dit nombre dit quantité et par suite chose susceptible d'augmentation et de diminution. Or, s'il est actuel, l'infini ne saurait être ni augmenté ni diminué.

Un nombre qui serait supérieur à tout nombre imaginable ne serait point un nombre, car s'il l'était, il pourrait, comme tout autre nombre, être augmenté d'une unité.

Le nombre infini appartient-il à la suite naturelle des nombres entiers? Si oui, il ne diffère du précédent que d'une unité, et par suite il est fini comme lui. Sinon, qu'est ce qu'un nombre qui n'appartient pas à la série des nombres possibles?

Est-il pair ou impair, premier ou non premier?

Dans tous les cas... ce nombre (Galilée) n'égalera pas son carré, son cube, sa n^e puissance; ou, s'il l'égale, il faut admettre que la partie égale le tout.

Troisième partie: L'infini mathématique

Ch. II: L'indéfini et la quantité infinitésimale

Deux méthodes pour justifier le calcul infinitésimal:

1° Méthode des limites (méthode d'exhaustion d'Archimède; sommation des indivisibles de Cavalieri; l'une additive, l'autre soustractive) Méthode des premières et dernières raisons, de Newton. Newton considère les limites fixes entre lesquelles varie la quantité, soit en augmentant, soit en diminuant. Lemme 1er des Principes (lib. III.):

« Les quantités, et ~~aussi~~ les raisons des quantités qui, en temps ~~fini quelconque~~ donné, tendent vers l'égalité, ~~et~~ ~~l'expiration~~ à différer entre elles ~~de moins à~~ constamment d'une quan[tité] moindre que ~~toute~~ différence donnée, deviennent fin[alement] égales.

Démonstration : Si l'on nie la proposition, soit [...] dernière différence ; elles ne peuvent donc s'approcher de plus près que la différence donnée d ; ce qui est con[tre] l'hypothèse. »

Cette démonstration est valable, parcequ'on y consi[dère] deux limites finies, dont la différence constante ne peut être [plus] petite que toute quantité donnée sans être rigoureu[sement] nulle.

~~Cett~~ Le nerf de cette démonstration est dans la mé[thode] des indéterminées, de Descartes (cf. Carnot, ch. II[...]

2° Méthode des infiniment petits, de Leibniz.

« J'ai donné un jour des lemmes des incomparables da[ns] les actes de Leipzig, qu'on peut entendre comme on v[eut], soit des infinis à la rigueur, soit des grandeurs seulem[ent] qui n'entrent point en ligne de compte au prix des au[tres]. »

Ce serait une méthode d'approximation indéfinie ; [...] étant inassignable, mais jamais nulle. Donc :

Ou l'infini existe : Bernoulli, Fontenelle.

Ou l'erreur subsiste : Buffon, Aug. Comte.

Berkeley : The analyst or a discourse addressed to an infid[el] mathematician (1734) : « In rebus mathematicis errores qu[am] minimi non sunt contemnendi. » ~~Aug. Comte est~~ [...] (Contra Newton)

Jean Bernoulli : « S'il existe une infinité de ces termes (dans une suite) il doit en exister un infinitième, par la même raison que dix exigeraient le dixième en rang des dix, et cent le centième en rang des cent ... Et l'infinitième à son tour ne marque pas une limite, puisque tout nombre peut incontestablement être augmenté d'une unité, et de deux, et de trois ... C'est seulement une série nouvelle qui commence, toute formée des nombres infinis de grandeur, et le cas est analogue pour le décroissement des infinis de petitesse » (*Crit. phil.* 6e année, n° 2. – Cf Renouvier, *Logique*, t. I, p 408, 409.)

Aug. Comte : « Il est impossible de prévoir à quel point les opérations successives peuvent grossir ces erreurs premières dont l'accroissement pourrait même ainsi devenir quelconque. »

Solution (de Carnot) : Toute quantité arbitraire en relation avec des quantités constantes perd, par ce seul fait, ce qu'elle a eu lors de mobile et d'indéfini, et doit être portée mentalement à la limite de sa décroissance ou de son progrès (cf *Carnot*, ch. I)

L'exemple de la tangente (choisi par Carnot) montre que le résultat de l'élimination des infiniment petits n'est pas approché, mais rigoureusement exact, car on le retrouve par l'Algèbre.

Les quantités infiniment petites ne sont pas des quantités très-petites, mais simplement des quantités finies arbitraires ou indéterminées qui disparaissent et passent à la limite zéro dans les relations avec des quantités finies *fixes*.

Lagrange n'admet les différentielles que comme des quantités finies (cf *Carnot*, § 154 – 156.)

« Le miracle de la science humaine c'est d'avoir su a
l'infini et le continu de la pensée au fini et au disco
de la nature »

Bolzano: Paradoxien des Unendlichen

§ 1. La plupart des paradoxes mathématiques, sinon tous, sont fondés sur l'idée d'infini.

§ 2. L'infini est opposé au fini: c'est un concept formé par la négation du fini (grammaticalement) les deux concepts s'appliquent aux ~~ensembles~~ multitudes et aux pluralités (~~ensembles~~ multitudes d'unités), et plus généralement aux grandeurs. En Mathématique, on parle de grandeurs infiniment grandes et infiniment petites.

§ 3: Le mot et signifie un ensemble d'objets distincts ou le tout composé de certaines parties. Ex: propositions à plusieurs sujets (sujet collectif.) Pour qu'un ensemble A, B, C, ... ait un sens, il faut que ses éléments soient tous différents les uns des autres.

§ 4: Des ensembles identiques par leur contenu peuvent être fort différents (ex. un verre à boire brisé ou non.) Le fondement de cette différence est la manière dont les parties sont unies ou ordonnées. Un ensemble tel que l'ordre de ses parties est indifférent s'appelle une multitude (Menge) Une multitude d'unités A (c. à d. d'objets rentrant sous le concept A) est une pluralité d'A.

§ 5: Il y a des ensembles dont les éléments sont à leur tour des ensembles. Un ensemble dans lequel il est indifférent de considérer les parties de ses parties comme des parties de l'ensemble s'appellera une somme (Propriété associative caractéristique)

§ 6 : On appelle grandeur un objet d'une espèce telle que deux objets de même espèce sont, ou bien égaux, ou bien l'un est la somme de l'autre et d'un troisième.

§ 7 : Quand un ensemble d'objets donnés est tel qu'à chacun de ses éléments en corresponde un autre suivant une loi uniforme, on l'appelle une série déterminée (Reihe). Cette loi est la loi de formation de la série. Les termes sont antérieurs ou postérieurs (sans que cela implique un ordre temporel ou spa… Un terme qui a un précédent et un suivant est dit intérieur; les termes extérieurs (s'ils existent) sont le premier et le dern…

§ 8 : Soit une série dont le 1er terme est une unité A, et … suivants s'obtiennent en ajoutant une unité A au précéden… tous ces termes (sauf le 1er) sont des pluralités d'A (nombres finis) et tous (y compris le 1er) sont les nombres entiers.

§ 9 : Si une pluralité donnée d'A est telle, que la série des nombres ne puisse l'épuiser, et n'ait un dernier terme, cette pluralité, plus grande que toute pluralité finie, sera dite infinie.

§ 10 : Les termes fini et infini sont définis ainsi sans confusion et sans cercle vicieux, quand il s'agit de pluralités. Or toute espèce d'infini se ramène à une pluralité infinie. Les mathématiciens ne connaissent que l'infini de grandeur: une grandeur est infinie quand aucun nombre fini ne peut la mesurer par rapport à l'unité. Une grandeur est infiniment petite quand tous ses multiples sont inférieurs à l'unité. En dehors des infiniment grands et infiniment petits de différents ordres, les mathématiciens ne connaissent pas d'autre infini.

§ 11. Les philosophes modernes (Hegel) dédaignent cet infini ; pour eux le vrai infini est l'infini qualitatif, qui ne se trouve que dans l'Absolu ou Dieu. Ils ne conçoivent l'infini (comme certains mathématiciens) que comme une grandeur variable croissant au-delà de toute limite sans jamais atteindre l'infini. Il est certain que c'est là un faux infini : car une grandeur peut dépasser toute limite finie et rester finie (ex : les nombres entiers croissants). Le vrai infini est une grandeur non variable (ex : la longueur d'une droite illimitée.) L'auteur soutient qu'on ne peut attribuer l'infinité qu'à un objet qui contient une grandeur ou une pluralité infinie. Exemple : Dieu.

§ 12. 1° Certains mathématiciens (Cauchy) définissent l'infini : une grandeur variable qui croît indéfiniment. La limite de cette variable serait la grandeur infinie. — Mais une variable n'est pas une grandeur, mais la représentation d'un ensemble (infini) de grandeurs différentes. L'infini n'est pas l'ensemble de ces grandeurs mais l'unique grandeur qui est leur limite (Ex : $tg\frac{\pi}{2}$: Il n'est pas infini selon l'auteur.) De plus, si l'infini était la limite des grandeurs qui croissent indéfiniment (sans limite, ce qui est contradictoire) l'infiniment petit serait identique à zéro, ce qui est faux.
2° Des mathématiciens et des philosophes (Spinoza) ont défini à tort l'infini : ce qui ne peut plus croître, ce à quoi l'on ne peut rien ajouter. Mais les mathématiciens peuvent fort bien ajouter encore à une grandeur infinie (ex : demi-droite).
3° D'autres définissent l'infini à la lettre : ce qui n'a pas de fin. Mais un point ou un instant n'ont pas non plus de fin (de bout) car ce sont au contraire des extrémités. De même la circonférence (et autres courbes fermées.)

D'autre part, il y a des grandeurs limitées qui sont infinies.
4° On dit souvent : est infinie une grandeur plus grande que tou[te] grandeur donnable. Mais si par donnable on entend réel, u[ne] grandeur infinie peut être tout aussi réelle qu'une grandeur fi[nie] et si par donnable on entend possible (non-contradictoire) o[n] admet d'avance que l'infini est impossible et contradictoire. On peut encore entendre par donnables les choses dont nous pouvo[ns] avoir l'expérience. Mais la qualité de fini ou d'infini ne dép[end] nullement du rapport de l'objet à notre sensibilité ; c'est un attr[ibut] intrinsèque et objectif, indépendant de la manière dont ~~nous~~ [nous le] percevons (en totalité ou en partie).

§ 13 : De l'objectivité de l'idée d'infini. L'infini s'applique dans le domaine des choses idéales ou irréelles : ainsi l'ensemble des vérités est infini : car à chaque vérité A correspond celle-ci : « A est vraie. »

§ 14 : Pourtant, beaucoup nient qu'un infini puisse être donné. 1e Obj : Un ensemble infini ne peut pas former un tout dans la pensée. L'erreur consiste à croire que l'on ne p[eut] penser le tout si l'on n'a ~~une~~ représentation distincte des parties (Ex : l'ensemble des habitants de Prague). Il suffit qu'elles rentr[ent] toutes sous un même concept A pour qu'on puisse dire l'ensemble [des A].
~~Autre erreur~~ : Un ensemble n'existe que s'il est pensé ; une vérité n'ex[iste] que si ~~on en~~ a l'expérience (Ex : ce qui se passe ~~au~~ pôle est soum[is] aux lois de la mécanique). D'ailleurs tous les corps sont des ensem[bles] dont nous ne percevons ni ne connaissons les parties. – 2e Obj : [Mais] tout ensemble est une création de notre esprit. – Rép : Il existe avant que nous le remarquions, ainsi que toutes ses propriétés. – 3e Obj : Pour qu'un ensemble existe, il faut qu'on puisse le penser tout entier, ce qui n'[est] ~~au contraire il faut qu'il soit possible pour qu'il soit pensé~~
Faux : on peut fort bien penser l'impossible, et tout ce qu'on pense n'existe [pas].
Est impossible ce qui contredit une vérité de raison pure (de concepts p[urs]).
Ce n'est pas le fait d'être pensé qui fonde la possibilité d'une...
donc !

60

Bolzano.

§ 15 : La multitude des nombres est infinie
Obj. : Mais tout nombre est fini ; donc la multitude des nombres est finie comme le dernier de tous.
Rép. : Il n'y en a pas de dernier de tous, ~~est~~ c'est justement pour cela que leur ensemble est infini ; en vertu de la loi de formation, chaque nombre a un suivant : le concept du dernier nombre (nombre maximum) est donc contradictoire

§ 16 : La multitude des grandeurs est infinie
L'ensemble des nombres entiers finis est une grandeur infinie, non un nombre infini (qui n'existe pas)

§ 17 : Infinité des parties de l'espace et du temps. (même dans un intervalle fini.)
Obj. « On peut toujours penser dans un intervalle plus de points qu'il n'en est donné, mais dans la réalité il ne peut ~~être~~ être donné qu'un nombre fini. »
Rép. : Le temps et l'espace ne sont pas des réalités ; et leurs parties ne dépendent pas de notre pensée.

§ 18 : La somme ~~d'un nombre~~ infini de grandeurs finies n'est pas nécessairement une grandeur infinie
Ex. progression géométrique ; séries convergentes.

Remarque ~~Dans~~ Les égalités : $S = 1 + e + e^2 + \dots + e^n + \dots$
ou $S = \frac{1-e^n}{1-e} + e^n(1 + e + e^2 + \dots)$
on ne doit pas poser cette parenthèse égale à S, car le nombre de ses termes est moindre quoique infini.

§ 19 : Il y a des multitudes infinies plus grandes ou petites que d'autres multitudes infinies.

Il n'y a contradiction que si l'on définit l'infini : une grandeur qui ne peut plus être augmentée. Ex : une demi-droite peut être accrue d'une longueur finie ou infinie.

§ 20 : Deux ensembles infinis peuvent être ordonnés de telle sorte, qu'ils paraissent soit égaux soit inégaux.

Ex : $0 \leq x \leq 5$ $\qquad 0 \leq y \leq 12$

Correspondance : $5y = 12x$

Application aux longueurs portées sur une droite.

§ 21 : D'une telle correspondance (univoque et réciproque) on ne peut conclure à l'égalité de deux multitudes quand elles sont infinies. Il faut de plus qu'elles aient les mêmes principes de détermination, par ex. la même loi de génération.

§ 22 : Cette conclusion n'est légitime que pour les ensembles finis, où l'on arrive à un dernier terme en les dénombrant. Mais dans les ensembles infinis, non-seulement nous ne pouvons arriver à un dernier terme, mais il n'y en a pas par définition.

§ 23 : Dans les ensembles infinis, deux éléments de l'un ne supportent pas les mêmes rapports que les deux éléments correspondants de l'autre (par ex. leur différence).

§ 24 : Deux sommes d'un nombre infini de termes égaux chacun à chacun ne sont pas nécessairement égales. Il faut de plus que les deux sommes aient les mêmes principes de détermination.

25 : Il y a dans la réalité un être infini (un Dieu)

26 : Certains acceptent l'infini idéal et nient l'infini réel, parce que la réalité implique la détermination ~~complète~~. Mais la détermination n'est pas moins nécessaire aux objets de la pensée. Du reste, dire d'une chose qu'elle est infinie n'est pas dire qu'elle est indéterminée, mais seulement qu'elle échappe à la détermination du nombre ; il n'y a pas là de contradiction.

27 : Certains mathématiciens, en revanche, ont admis à tort l'infiniment grand et l'infiniment petit dans les cas qui n'en comportent pas : Exemple une durée infinie qui aurait commencement et fin, un laps de temps infiniment petit ; de même pour les distances de deux points ; pour les forces physiques (démonstration fondée sur le principe de causalité et sur le fait que l'infini introduit ~~l'~~ l'indétermination au sein du déterminisme)

28 : Possibilité d'un calcul de l'infini : il s'agit de déterminer le rapport de deux infinis entre eux

29 : Parmi les nombres ou pluralités, il y en a qui ont avec d'autres des différences et des rapports finis (tant rationnels qu'irrationnels)

30 : De même pour les infiniment petits (Exemple de probabilité ; calcul complet de $\frac{dy}{dx}$ (y fonct. algébrique de x))

31 : Les mathématiciens ont le tort de considérer les infiniment petits comme nuls par rapport aux infiniment petits d'ordre inférieur (de même pour les infiniment grands)

32 : On a prétendu (Ann Gergonne, t. XX, n° 12 ; 1
que la série : $a - a + a - a + \ldots$
a pour somme $\frac{a}{2}$ (quotient de a par $1+1=2$.
Mais cette série n'est pas une véritable somme, car elle n'a
pas les propriétés commutative et associative ; elle n'a
aucune valeur, car sa valeur dépend de l'ordre de ses termes.
Quant à la considération de quotient, elle n'a de valeur
que si le reste va toujours en diminuant, de sorte que le
quotient soit de plus en plus approché. Par exemple

$$\frac{a}{1-e} = a + ae + ae^2 + ae^3 + \ldots + ae^n + \ldots$$

n'a de sens et de valeur que si $|e| < 1$.
On a le tort de considérer la série mise en facteur après
n termes (entre parenthèses) comme équivalente à la série
totale (infinie) car elle a n termes de moins.

33 : On ne doit jamais juger de l'égalité ou inégalité
de deux sommes infinies par la comparaison de leurs
termes correspondants et du nombre de ces termes. Ainsi
la somme des carrés des nombres entiers paraît plus grande
que la somme des nombres entiers ; et aussi plus petite,
parce qu'elle y est contenue. L'auteur se prononce pour
la 1^re^ thèse : la somme des carrés est infiniment plus grande
que la somme des nombres.

34 : Eclaircissement du concept de zéro
0 n'est pas seulement un signe sans objet réel ($\sqrt{-1}$ aussi)
il est défini par les 2 égalités : $A - A = 0 \quad A \pm 0 = A$
En même temps l'addition et la soustraction se trouvent étendues
à ce symbole (extension précieuse pour la science)

La multiplication reçoit une extension analogue :

$$A \times 0 = \cancel{A}0.$$

– Mais la division ne peut en recevoir une qui ne soit pas contradictoire avec les formules précédentes ; car si dans la formule :

$$B \times \frac{A}{B} = A$$

on faisait $B = 0$, on aurait pour produit : A, au lieu de 0 (en vertu de la formule de mult^on^ par 0)

On ne doit donc pas diviser les 2 membres d'une équation par zéro (à moins que ce ne soit une identité) ni supprimer un facteur qui peut devenir nul.

35 : Il ne faut pas négliger les infiniment petits d'ordre supérieur comme nuls : car ils reparaissent avec leur valeur quand les infiniment petits principaux s'annulent.

M et $M + m$ ne sont pas égaux, car M par ex. peut être rationnel, alors que $M + m$ serait irrationnel !

36 : Euler considère les infiniment petits comme nuls, et les infiniment grands comme quotients des grandeurs finies par des infiniment petits. On justifie ainsi l'omission (annulation) des infiniment petits, mais on rend leurs rapports inconcevables. – Exemple : Soit y fonction ~~rationnelle~~ algébrique de x : quand le dénominateur s'annule, la formule (de la forme $\frac{m}{0}$ ou $\frac{0}{0}$) n'indique plus la valeur de y : elle ne l'indique que pour les valeurs infiniment voisines de celle qui annule le dénom. On croit pouvoir lever l'indétermination en supprimant le facteur $(x - a)$ au numér. et au dénom. : mais on oublie que cette opération n'est valable que tant que $x \gtrless a$.

Il est vrai que la valeur que l'on obtient ainsi se lie par continuité pour la fonction, pour $x = a$

aux valeurs voisines: mais il n'y a aucune nécessité à ce que
loi de continuité soit observée par la fonction pour cette val

37: Il est vrai que le calcul de l'infini, malgré ces erreurs
conduit à des résultats exacts: mais cela vient de ce que
opérations en apparence incorrectes se justifient par un autre
qui est légitime, ~~et dont~~ les inventeurs ont eu le sentiment

Conception du Calcul infinitésimal. Inutile de supposer que
grandeurs considérées peuvent ~~être~~ devenir infiniment petites: il suf
que les grandeurs variables et dépendantes aient une dérivée
moins dans l'intervalle considéré. — La dérivée ($\lim \frac{\Delta y}{\Delta x}$) s'obt
précisément en annulant Δx et Δy dans l'expression dé développée
rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$; de sorte qu'il n'y a pas d'inconvénient
à considérer dx et dy comme nuls, bien que le rapport $\frac{dy}{dx}$
n'ait plus de sens dans cette hypothèse. Ce symbole n'est par un
véritable rapport, mais la limite du rapport réel $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

L'auteur peut démontrer la formule de Taylor pour toute fonc
y de x, à l'exception de valeurs isolées de x et Δx.

Importance de cette formule pour la rectification des lignes
la complanation des surfaces, le cubage des solides, sans
recourir aux infiniment petits ou à des postulats équivalents

De formules légitimes comme $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$
on déduit les formules symboliques en différentielles

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

qui sont valables, parce qu'on peut en tirer les premières en
effectuant sur les différentielles toutes les opérations algébriq
permises pour les grandeurs finies (par ex: division par d
Elles ne peuvent donc conduire à aucune erreur.

De même, on peut sans aucune erreur négliger au cours du calcul les quantités différentielles qu'on sait d'avance devoir disparaître du résultat final (passage des Δx aux dx, en omettant les termes de puissances supérieures).

Cette méthode repose sur des principes analogues à ceux du calcul des imaginaires. Ce sont toujours des symboles vides de sens que l'on combine de telle sorte que les relations obtenues en leur substituant des quantités réelles soient ~~xxxx~~ toujours vrais.

38 : Prétendues contradictions inhérentes au concept de continu (temporel, spatial, matériel.) Le continu serait composé de points inétendus. Pourquoi pas ? Parce que, dit-on, une propriété qui manque à toutes les parties ne peut appartenir du tout. Ce n'est pas une raison : chaque tout a des propriétés qui n'appartiennent pas à ses parties.

On dit qu'entre deux points il y en a encore d'autres ; sans doute : cela prouve que le continu se compose d'une infinité de points ; encore faut-il que cette infinité soit rangée dans un certain ordre. Définition du continu : un ensemble de points tels, que chacun d'eux en ait au moins un autre dans son voisinage (inf. petit) — Dans le cas contraire, le point est dit isolé —

On exige que chaque point ait un voisin déterminé qu'il touche : c'est impossible et contradictoire.

Cela n'est pas inconcevable mais inimaginable.
Il faut bien se garder d'admettre un intervalle minimum.
Tout ensemble infini peut se diviser en ensembles aussi infinis.
— Mais certains mathématiciens reconnaissent que le continu ne peut être engendré par la juxtaposition des points.
Sans doute, la subdivision à l'infini (dichotomie) n'atteint

pas les éléments du continu. Mais le continu ne peut se co

que de points.

39: Paradoxes dans le concept du temps.

Le temps n'a aucune réalité; il n'est ni substance ni ac

Il ne change pas, car il est ce en quoi tout change. Il est la

~~les attributs contradictoires~~ du principe de contradiction: à

instant, x est a ou non-a (c'est la définition de l'in

Le temps infini est l'ensemble des instants; il ne diffère pa

l'éternité. Seulement les choses créées changent dans le tem

tandis que Dieu reste le même. Chaque laps de temps si

qu'il soit, comprend une infinité d'instants (non en moins n

que dans un grand intervalle)

40: Paradoxes dans le concept de l'espace.

Même conception que pour le temps (L'auteur a déduit la

de l'espace de celle du temps, et a montré pourquoi l'espace

trois dimensions) L'espace infini est l'ensemble des lieux

L'espace n'est pas réel, mais il est objectif (c'est une prop

des choses) Il est composé de points, qui néanmoins ne se touche

– Etendue à 1 dimension: telle que les points situés dan

voisinage de chaque point ne forment pas une étendue

Etendue à 2 dimensions: telle que ces points forment

Etendue à 3 dimensions: telle que ces points forment une

– En quoi consiste la grandeur d'une étendue? On est te

répondre: Dans la multitude des points qu'elle contien

Mais la grandeur d'un solide ne change pas quand on

enlève tous les points de sa surface, etc. (comme cela a

quand on mesure par ex. un cube d'arête 2. les 12 faces

des cubes disparaissent) – La mesure d'une grandeur co

~~tirer~~ déduire la grandeur M de l'unité m et la gr. N de l'u

~~de telle sorte~~ ~~suivant une loi~~ telle, que par la même loi on déduise la gra

M+N de l'unité $m+n$, ~~sans~~ avoir à tenir compte de l'ou

ou entre

41 : Propositions paradoxales touchant l'étendue.

1 : Une droite limitée ou illimitée a la même longueur quand il est illimité segment de, il n'a pas de dernier point.

2 : Le périmètre d'un triangle peut ne pas contenir tous les sommets, ou les contenir deux fois.

3 : Si l'on dichotomise un segment de droite et qu'on y supprime les points de division, il a la même longueur.

4 : Deux intervalles égaux contiennent le même nombre de points.

5 : Deux étendues qui contiennent la même multitude de points sont égales, mais non réciproquement.

6 : Deux figures semblables contiennent des multitudes de points proportionnelles à leurs grandeurs.

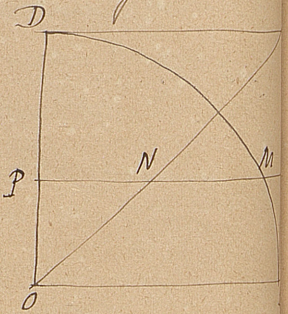
7 : Par suite, il peut y avoir des multitudes (infinies) dont le rapport est irrationnel. G. K. Fischer

42 : A la 6e prop. on oppose souvent celle-ci : Deux figures semblables contiennent le même nombre de points (ex : cercles concentriques) d'où contradictions (Aristote). Cela repose sur ce principe erroné : deux multitudes infinies sont égales quand elles se correspondent élément à élément. D'ailleurs le même raisonnement s'appliquerait aux droites.

43 : Les mathématiciens ont souvent méconnu cette vérité : « La distance de deux points ne peut être que finie, » en admettant des distances infiniment grandes (Ex : tangente et sécante trig.) Ces longueurs infinies sont-elles positives ou négatives ? Il est faux de dire que $tg\frac{\pi}{2}$ est infinie : rigoureusement parlant $\sin 0$ et $tg 0$ n'existent pas.

44 : Autre erreur : Joh. Schulz a voulu calculer la grandeur de l'espace infini : $\frac{4}{3}\pi\omega^3$. Il a conçu chaque demi-droite infinie comme un rayon, donc comme

limitée, et l'espace lui-même comme limité (sphériqu
Cela réfute aussi Boscovich (Diss. de transf. locorum geo
45 : De même on admet à tort des distances inf. petit
et même d'ordres superposés (en concevant les courbes comm
composées de droites inf. petites, etc.) Seulement, ce qui fa
qu'on ne commet aucune erreur, c'est que les fonctions
continues que l'on considère ont une dérivée (sauf en
certains points isolés) de sorte que tout ce qu'on dit des grand
inf. petites vaut des mêmes grandeurs finies qui décroiss
indéfiniment. — Paradoxes : les courbes, quoique composées
d'éléments rectilignes, auraient une courbure : courbure
inf. petites et inf. grandes en certains points.
46 : Paradoxe de Galilée : La circonférence égale au ce
(comme surface) La ~~zone~~ anneau engendrée par
MR est égal au cercle engendré par PN ;
à la limite, PN se réduit à O, et MR à B.
Cela veut simplement dire que le cercle
PN et l'anneau MR n'existent plus
(ont une surface nulle.)



47 : La cycloïde aurait une courbure infinie (de rayon nu
au point de rebroussement. Cela signifie que son rayon de courbu
diminue indéfiniment quand on s'approche de ce point —
On peut montrer géométriqt que la cycloïde est intérieure à
toute circonférence passant par ce point et normale à la base.
A vrai dire, la courbe n'a plus de courbure en ce point.
48 : 1° Des étendues infinies peuvent avoir une grandeur finie
(non des lignes continues, mais des surfaces et des solides.) Dém
tration du théorème : la ligne droite est le plus court chemin —
par la considération de la similitude.

2° Une étendue contenue dans un espace fini peut être infinie en grandeur (vrai pour les lignes et les surfaces, non pour les volumes.) Une surface finie peut contenir une ligne infinie car l'unité de surface n'est pas l'unité de longueur

3° Une figure peut faire une infinité de tours autour d'un point, et néanmoins être finie en grandeur. Ex: la spirale logarithmique, prise en deçà d'une certaine distance du pôle. Cela est encore vrai pour les surfaces et les solides sans supposer (comme pour les lignes) qu'~~elles~~ ils soient contenus dans un espace fini.

49 : 1° La multitude des points d'un segment linéaire qcque est infiniment plus grande que celle des points de division obtenus par dichotomie par ex. (cf. Cantor)

2° Deux figures égales ont le même nombre de points, quand on définit de même leurs bornes.

3°-7° Calcul du nombre des points du carré, du cube, du rectangle du parallélépipède.

8° Toutes les droites infinies sont égales (ont le même nombre de points)

9° Les deux moitiés d'une droite infinie ne sont pas égales, donc une telle droite n'a pas de milieu.

10°-11° : Surface d'une bande parallèle (elle n'a pas de ~~milieu~~ médiane)

12°-13° : Surface du plan infini (il n'a pas de médiane)

14° : Deux angles opposés par le sommet sont semblables, non égaux

15°-16° : Volume d'une couche parallèle (n'a pas de plan médian)

17°-18° : Deux angles dièdres opposés sont semblables, non égaux

19° : L'espace infini ou solides n'a pas de plan médian

50: Paradoxes en métaphysique et en physique.

1° L'auteur pose en principe qu'il n'y a pas deux corps ni même deux atomes parfaitement ~~égaux~~. L'expérience n'a rien à voir dans cette question. Du moment que A et B sont deux objets A n'est pas B, B n'est pas A ; ils doivent donc se distinguer par quelque caractère non commun.

2° L'expérience nous apprend que les corps sont composés soit, mais grâce à des vérités rationnelles. Si donc la raison nous enseigne que le composé suppose le simple, nous ne pouvons révoquer en doute l'existence de substances simples sous prétexte que nous ne les voyons pas.

3° Toute substance change incessamment malgré les apparences contraires. On prétend expliquer tous les changements apparents par des mouvements d'atomes immuables ; mais comment concevoir les déplacements d'atomes, leurs actions réciproques sans changements intérieurs ? Il faut admettre que leur force varie, et que leur lieu varie en conséquence.

51 : Réfutations des ~~opinions~~ préjugés scolastiques contraires

1° Hypothèse d'une matière inerte et homogène.

52 : 2° On ne peut admettre une action immédiate d'une substance sur une autre. C'est une règle de méthode destinée à combattre le sophisme paresseux ; mais comment concevoir action médiate sans une action immédiate ? Contradiction (Hypothèse de l'harmonie préétablie, gâte le système de

53 : 3° Impossibilité d'une action à distance. Aucune deux substances ne peuvent agir l'une sur l'autre qu'à distance

54 : 4° Pénétrabilité des substances. Si deux atomes pouvaient coïncider un seul instant, leur action réciproque serait indéterminée

55 : 5° Une substance pensante ne peut être étendue et ne peut même pas occuper un point dans l'espace. D'où Kant a conclu que l'espace n'est qu'une forme subjective de la sensibilité, et que le monde intelligible (des esprits) est étranger à l'espace. (Cf. Wissenschaftslehre et Athanasia.)

56 : 6° Difficulté de l'union de l'âme et du corps, et de leur mutuelle influence : disparaît.

57 : 7° Conception des forces sans substances (corrélative des substances sans forces) vient de l'idée grossière et sensible de substance. Mais une force sans substance, produisant des effets réels, devrait être réelle, donc serait elle-même substance.

58 : Il n'y a pas de degré d'existence qui soit le plus haut ou le plus bas (voir § 38.) (paradoxe affirmé par l'auteur.)

59 : Une même multitude d'atomes peut remplir un grand ou un petit espace, sans qu'aucun point reste vide ou reçoive plusieurs atomes. Il n'est ~~pas~~ donc pas besoin d'admettre la porosité et le vide, ni la pénétrabilité des corps, pour expliquer les divers degrés de densité (en nombre infini)

60 : Toute substance agit sur chaque autre, d'autant moins qu'elle en est plus éloignée ; de sorte que la résultante des actions subies par chaque atome obéit à la loi de continuité.

61 : Il y a des substances dominantes (cf. Athanasia 1829) mais sans que leur force soit infiniment plus grande que celle des autres substances (dominées)

62 : Il n'est pas nécessaire que dans un ensemble (infini) d'atomes il y en ait un plus fort que tous les autres (dominant) ; cela n'est vrai que pour les ensembles finis.

63 : Les atomes dominants (en nombre fini dans un espa
composent les corps. Les autres forment l'éther. Les a
ne se distinguent que par le degré de leurs forces. On doit a
qu'ils en ont une sensation, si faible qu'elle soit. Or deux at
ne sont pas indifférents à leur distance ; il y en a une qu
leur plaît davantage ; d'où attraction et répulsion. M
quand la distance de deux atomes dominants est suffisam
grande, leur action disparaît dans la multitude infinie des
atomes, de sorte que la résultante est la même que si le c
n'était composé que d'éther homogène. D'où la loi d'attract
proportionnelle aux masses (multitudes d'atomes) et en raison
inverse du carré de la distance (car le nombre des atomes q
peuvent exercer ~~leur~~ la même action qu'un autre sur l'atome considé
est prop. au carré de la distance). C'est ce qui explique ce fait à
surprenant, que tous les corps simples (matières hétérogènes)
aient leurs poids prop. aux masses, c.à.d. sont également attir
Ainsi c'est l'éther (le calorique, que l'on considère à tort
comme impondérable) qui constitue la masse des corps et
détermine leur poids.

64 : Les atomes d'éther étant fortement attirés et conden
par l'atome dominant, tendent à s'éloigner et se repoussent
d'où la force répulsive considérée comme primitive dans lie

65 : Un atome dominant ne peut jamais être dépouillé
tous ses atomes dominés. Il retient au moins les plus proches

66 : Question de la limite des corps. Ce sont les atomes extér
d'éther qui dépendent des atomes dominants du corps. On con
que cette limite doit très variable, et même qu'elle n'existe
car il se peut qu'il n'y ait pas parmi les atomes dominés
derniers atomes (par ex. quand le corps voisin en a.)

67 : Quand deux corps se touchent-ils immédiatement ?
Quand ~~ses~~ leurs atomes extrêmes forment une étendue continue. ~~ou les atomes extrêmes de l~~ Par ex. quand l'air interposé disparaît.
Un corps est en contact, soit avec d'autres corps (tels que l'air) soit au moins toujours avec l'éther.

68 : On croit que dans le plein il n'y a que le mouvement circulaire qui soit possible. Mais il y en a bien d'autres, puisque la densité peut varier à l'infini : par ex. la vibration, la rotation.
(Remarque : un atome inétendu ne peut tourner sur lui-même)

69 : Il n'est pas impossible qu'un atome décrive une droite ou un cercle, mais cela est infiniment peu probable ; pour qu'un atome décrive une ligne brisée, il faut que sa vitesse s'annule (un instant) à chaque sommet. — Mais il est contradictoire qu'un atome décrive la spirale logarithmique (branche centrale) en un temps fini, et arrive ainsi au pôle ; car si sa vitesse linéaire est constante, sa vitesse angulaire devient infiniment grande ; or aucune force finie ne peut produire un tel effet. Même alors, l'atome ne pourrait arriver au centre : car si le centre appartient à la courbe, elle n'a aucune direction (dérivée) en ce point.
L'univers ~~tout entier~~ peut-il se déplacer ou tourner sur lui-même ?
Ce n'est pas impossible géométriquement, mais physiquement : car aucune force ne peut produire un tel effet, et un tel mouvement n'aurait pas de raison suffisante.

70 : Deux paradoxes d'Euler : le 1er, remarqué par Boscovich : Si ~~un atome~~ un point A soumis à l'attraction newtonienne du centre C est lancé perp. à AC, il décrit une ellipse ayant C pour foyer. Donc si la vitesse initiale devient nulle, l'ellipse se réduit à AC ; d'autre part le point A devrait dans ce cas également osciller de part et d'autre de C

Mais d'abord, ce cas échappe à la loi de continuité; et ensuite
la force et la vitesse en C devraient être infinies, ce qui est impossible.
2e paradoxe : l'oscillation infiniment petite du pendule a
pour durée : $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}$; tandis que sa chute sur la corde
infiniment petite (plan incliné) a pour durée : $\sqrt{2}\sqrt{\frac{r}{g}}$
Or on identifie la corde et l'arc infiniment petits.
Ici encore, la continuité est violée : la corde infiniment petite
diffère de l'arc infiniment petit : par ex., elle n'a pas de courbure

P. du Bois-Reymond

Paul du Bois-Reymond : Théorie générale des fonctions.
Première partie : Métaphysique et théorie des concepts mathématiques fondamentaux : Grandeur, limite, argument et fonction

traduit de l'allemand par G. Milhaud et A. Girot.

Nice, 1887.

Ch. I. Les grandeurs mathématiques se réduisent de proche en

aux grandeurs linéaires (nombres et longueurs)

Définition du concept de quantité mathématique li

1° Comparaison sans représentation de mesure :

I. Les quantités math. linéaires <u>sont égales</u> ou inég
de même espèce

II. Parmi les quantités linéaires de même espèce, aucun

la plus petite ni la plus grande

III. Deux quantités de même espèce réunies forment

nouvelle quantité de la même espèce, et plus grande

IV. Quand une quantité est plus grande qu'une deu

il en existe toujours une troisième (de même espèce) qu

à la deuxième reproduit la première

2° Comparaison avec représentation de mesure :

(On conçoit les parties composantes d'une quantité comm

V. On peut toujours additionner des quantités égales

nombre suffisant pour obtenir une quantité au moins

grande qu'une quantité quelconque de la même espèce,

VI. Une quantité peut être partagée en <u>n</u> parties ég

étant un nombre entier quelconque ; et l'on peut prendre

grand pour que les parties obtenues soient plus petit

quantité de la même espèce, donnée aussi petite qu'

Si petites que soient d'ailleurs ces parties, elles sont tou

quantités de même espèce.

<u>L'unité et le un</u>. Ce qui sert de base au concept d

entier, c'est le <u>un</u> ; Comme le <u>un</u> est le point de dépa

nombres entiers, <u>l'unité</u> est celui des nombres fractio

Toute unité est un <u>un</u>, mais tout <u>un</u> n'est pas une

Les deux conceptions idéaliste et empiriste de la limite et de la grandeur.

A. Système idéaliste.

1° Idéaliste. Le concept de limite.

L'existence de la limite a besoin d'une démonstration.
On considère le segment rectiligne (0,1) et les points rationnels et algébriques de ce segment; en particulier ceux qui répondent aux fractions décimales de la forme: $0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_q$.
Si une fraction décimale est illimitée et périodique on sait qu'elle a pour limite une fraction non décimale c.à.d. un nombre rationnel. Donc une suite de points rationnels peut avoir pour limite un point rationnel.
Si une fraction décimale se prolonge indéfiniment suivant une loi donnée, sans être périodique, a-t-elle encore une limite? Elle n'a pas pour limite un nombre rationnel. Il ~~faut~~ s'agit de démontrer l'existence d'un point-limite auquel correspondra le nombre irrationnel défini par la fraction décimale illimitée

$$0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n \dots$$

Dans toutes les démonstrations tentées de l'existence de ce point, on considère l'étendue comprise entre les 2 points extrêmes de deux suites de points qui convergent, c.à.d. l'intervalle des valeurs par excès et par défaut de la fraction illimitée: cet intervalle $\frac{1}{10^n}$ décroît sans cesse sans jamais devenir nul; à un certain moment, on considère l'étendue qui décroît indéfiniment comme nulle et on la réduit à un point, qui est le point-limite. Mais ce passage d'une étendue linéaire, si petite qu'elle soit, à un point, est illégitime; un intervalle linéaire est toujours semblable à l'intervalle (0,1) et ne peut être assimilé à un point. « Une rencontre graduelle de deux

points, expressions dont on se sert et qui semble très-bi[en]
le fait, est absolument un non-sens. Ou bien on a d[eux points]
séparés par une étendue, ou bien on n'a qu'un seul po[int ; il]
n'y a pas de milieu. »

On n'a jamais que des étendues de plus en plus petite[s, embo]
ıtées les unes dans les autres, sans que jamais leurs extré[mités]
puissent se confondre et déterminer ainsi le point lim[ite. On]
ne pourrait démontrer l'existence du point limite qu'[en concevant]
la ligne comme composée de points ; mais c'est là une [conception]
contradictoire et anti-mathématique. Au fond, cette con[ception]
implique le même sophisme : on imagine des points de [plus en]
plus rapprochés, puis on considère leurs intervalles com[me nuls.]
La démonstration de l'existence du point limite réal[isé]
est donc impossible, et contradictoire quand on l'ess[aie.]
Sortons de la représentation et plaçons nous dans la réa[lité ;]
~~nous demandons si~~ existe-t-il, indépendamment de n[ous]
un point limite correspondant à la fraction illimitée 0,[...]
lorsque les étendues 0,α_1, 0,$\alpha_1\alpha_2$, ... existent ? [Il ne s'agit]
plus de savoir quels sont les points que nous pouvons d[éterminer]
sur un segment de droite représenté (imaginé) mais [quels sont]
ceux qui y existent réellement (distinction du possible [et du réel).]

Distinction de l'illimité et de l'infini. — « Les corps
nous apparaissent en nombre illimité ; mais leur nomb[re]
ne peut être que fini ou infini. » — On se représente l[e nombre]
comme illimité, non comme infini.

« On appelle illimité en grandeur ce qui, tout en étant f[ini,]
peut être dépassé par des multiples de mesures finies, parce [que]
nous le figurons grandissant et sortant des confins de tou[te ...]
« L'illimité est donc toujours fini ; l'infini est ce qu[i ...]

dans la direction de ce qu'on suppose illimité, c.à.d. ce qui n'est pas fini.»

« Quel est donc le nombre des points de divisions situés sur l'étendue unité ? Dans la représentation, ce nombre est illimité, et par suite, dans la réalité objective, il est infini.»

« L'étendue unité se décompose en une infinité d'étendues partielles, dont aucune n'est finie. Ainsi l'infiniment petit existe réellement.»

« Un nombre fini d'étendues infiniment petites ajoutées les unes aux autres ne donne pas une étendue finie, mais une nouvelle étendue infiniment petite.»

De même, si grande qu'on puisse se figurer une étendue finie, un nombre fini de pareilles étendues ajoutées les unes aux autres fournit toujours de nouveau une étendue finie.»

« Deux quantités finies dont la différence est infiniment petite sont égales.»

Cette définition de l'égalité satisfait les conditions mathématiques, savoir que si 2 grandeurs ne sont pas égales, leur différence doit être de même espèce, c.à.d. telle qu'~~on la~~ multipliée par un nombre fini, elle dépasse les 2 grandeurs considérées.

« Une quantité finie ne change pas si on y ajoute ou qu'on en retranche un infiniment petit.»

L'infiniment petit est irreprésentable, par essence, dans son rapport avec le fini ; en lui-même, il peut se représenter comme fini.

« L'infiniment petit est une quantité mathématique et a de commun avec le fini l'ensemble de ses propriétés.»

Une fois admis le concept de l'infiniment petit, on peut prouver l'existence du point-limite, car l'intervalle des 2 suites de points convergentes devient infiniment petit.

« L'ensemble de tous les nombres est infini. »

« On est tenté d'abord de croire qu'il n'est qu'illimité, [...] pense à celui qui compte ; mais il faut encore ici sépar[er celui] qui compte du nombre lui-même » (Numerus infinit[us] apr. Gauss.)

« Les nombres rationnels (compris entre zéro et un) [sont] un ensemble illimité, et non infini. » En effet, leur num[érateur] et leur dénominateur doivent être finis. L'ensemble des rationnels peut être supposé aussi grand qu'on veut, [mais] fini.

« L'ensemble des nombres entiers est infini, parce qu'il [...] pas l'existence d'êtres pensants, tandis que l'ensemble des rationnels est lié à la personne qui pense. » ?

Distinction du zéro et de l'infiniment petit.

« Les formes $\frac{1}{0}$, $\frac{0}{0}$, sont à repousser, car elles manqu[ent] d'exactitude et de sens. »

« Le zéro n'appartient pas au domaine des quantités réelle[s], pas une quantité. » On peut faire parcourir à une [...] l'ensemble des valeurs positives et négatives, finies et inf[iniment] petites sans passer par zéro (1)

« On ne devrait pas dire, x^2-1 s'annule pour x [...] devient infiniment petit pour $x=1$. »

« $\frac{1}{x}$ devient infini positif quand x devient inf. [...] négatif

---

L'égalité $V=0$ signifie que V est un infiniment [petit] d'ordre supérieur à ceux qu'on a négligés pour l[e ...] et qui pourraient figurer dans le 2e membre.

La valeur de $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ est e pour x infinimen[t ...]

$(1+x)^{\frac{1}{x}}$ — e — x infinimen[t ...]

(1) Cela paraît être un acte violent de l'imagination d'annuler une quan[tité] pour la ressusciter aussitôt après, comme on rallume un flambeau [...]

Trois opinions historiques sur les infiniment petits :
Les uns ont attribué à l'infiniment petit une existence réelle
D'autres, intermédiaires, considèrent l'infiniment petit comme une quantité fluente, tendant vers zéro (illimité en petitesse)
D'autres enfin entendent par infiniment petit une quantité finie que l'on peut rendre ~~aussi~~ petite qu'on veut, de sorte que les relations puissent être rendues aussi peu inexactes qu'on veut.
Newton et Lagrange ont introduit l'infiniment petit comme simple expression littérale
« Autant les savants sont disposés à placer l'infini au-dessus de l'illimité dans l'espace et dans le temps, autant la plupart d'entre eux se décident difficilement à croire à l'infiniment petit, quoiqu'il possède le même droit à l'existence que l'infiniment grand, et que même il doive s'en déduire avec une nécessité logique. »

Chaîne naturelle des quantités :

Infiniment petit
Illimité en petitesse
Fini
Illimité en grandeur
Infiniment grand

zéro n'y est pas compris,
…e n'est pas une quantité. »

Toute fraction décimale illimitée a pour limite fixe une grandeur mathématique

Critique du système de l'Idéaliste par l'Empiriste.
Les suites dépourvues de lois ne sont pas des nombres, quoique l'Idéaliste les considère comme des quantités données.
L'Idéaliste : Un nombre décimal illimité peut être donné sans aucune loi de succession de ses chiffres, c.à.d. empiriquement, en donnant une longueur (incommensurable avec l'unité), et en espérant que l'on puisse jusque poursuivre indéfiniment les opérations de mesure

On peut appeler <u>empiriques</u> ces nombres irrationnels san
mathématique, sans loi.

<u>L'Empiriste</u>. L'hypothèse fondamentale de l'Idéal
l'existence de la mesure exacte : la longueur exacte et l'idé
nature de la longueur et de ses parties aussi petites qu'on veut.
L'exact ~~sensible~~ dans la perception sensible n'est qu'appro
De l'exact sensible nous tirons le concept d'exact idéal, qu
répondant pas à une perception réelle, n'est qu'une représenta
« Celle-ci est l'origine de l'idéalisme inconscient commun à tous les homme
métaphysique » Nous croyons, sans l'avoir vu, à la po
de l'exact parfait. — Aucune forme de la nature n'est gé
exacte : hétérogénéité absolue de la matière. Même s'il
dans la nature des figures exactes, nous ne pourrions les recon
Toute mesure est approximative : on ne peut s'assurer em
qu'une quantité est rigoureusement nulle, qu'une ligne
sement droite, etc. — L'unité de longueur n'a donc qu
arbitraire. — La mesure exacte, avec toutes les idées qui en
(limite, infiniment petit, etc.) n'est qu'un produit verbal
sans aucune réalité. — Principe de l'empiriste : Pas de
sans représentation.

<u>L'Idéaliste</u>. Distingue les idéaux géométriques des
empiriques auxquels ils s'appliquent. — Le concept de l'esp
homogène est la dernière abstraction tirée des représentations du mon
Peu importe que cet espace soit réalisé. Cet espace contien
les figures qu'on peut imaginer, avec une précision ab
La pensée qui analyse la matière doit toujours aboutir
images exactes. L'inexactitude même enveloppe une certai
Deux manières d'engendrer les grandeurs géométriques :
progressive : celle-ci suppose le mouvement continu, et

conçu comme espace infiniment petit. La première donne des représentations exactes, d'où l'on tire le concept du point, c.à.d. de l'infiniment petit, avec lequel on reconstruit l'espace.

L'empiriste. L'espace vide et homogène, les atomes, le point, sont des limites irreprésentables de concepts représentables : ce sont des mots sans réalité. — La distinction entre illimité et infini n'a pas de sens : infini veut dire sans fin, c.à.d. illimité, et ne signifie pas autre chose. « Je ne puis me figurer que des choses finies d'une grandeur et d'une petitesse arbitraire. »

L'Idéaliste. Nous avons la conviction qu'il existe certaines choses en dehors du système de nos représentations (réalité extérieure). Les concepts idéalistes d'infini, d'exact, etc. sont dans un rapport direct avec cette réalité, cette machinerie insondable qui se cache sur les coulisses du monde des phénomènes. » Il ne s'agit pas de démontrer l'existence de ces objets idéaux en dehors du système de représentations ; cela est impossible, car cela suppose que les idéaux soient logiquement liés à nos représentations et en fassent partie. L'existence d'une limite de représentations saute aux yeux, et s'impose à l'esprit en vertu d'une impulsion irrésistible qui nous porte à dépasser le domaine des représentations. « L'empiriste est comme l'enfant sage qui se garde bien de franchir la haie du jardin. »

B. Système empiriste.

L'Empiriste. Toute connaissance sûre (bien fondée scientifiq^t) dérive des perceptions immédiates et doit pouvoir se ramener à notre système de représentations correspondant aux objets perceptibles. Épuration du système de concepts : on rejette les concepts auxquels ne correspondent pas des représentations réelles, mais bien des limites irreprésentables de représentations : ce ne sont que des mots.

Toute relation exacte entre des concepts doit pouvoir se tirer d
perceptions sans l'aide du non-représentable. Nos repr
doivent suffire à fournir les concepts et les principes fond
de l'analyse — L'Idéaliste pose l'existence de la limite com
axiome, un objet de foi. L'Empiriste n'admet pas de
Il idéalise ses représentations, les rend aussi de moins ef
inexactes, aussi peu inexactes qu'il veut; mais il s'in
déduire de ses représentations l'idée de la ligne droite p
car ce n'est que le terme fictif d'une suite de ~~perfection~~ représenta
(perfectionnées) qui n'admettent pas de terme.

L'opposition entre l'Idéaliste et l'Empiriste se concent
l'opposition entre l'exact parfait et l'exact à volonté

Représentations empiristes des images géométriques : l
largeur et épaisseur, point avec 3 dimensions ; les dime
négligées étant aussi petites qu'on le veut (jamais nulle
et même l'espace sont composés de ~~mais~~ finies points sans lacunes.

Le concept de limite. Reprenant les deux démonstrations de
l'Empiriste les déclare valables en attribuant à la ligne une
représentation grossière de la limite par des traits doués d
qui finissent par se recouvrir et se confondre

Pour l'Empiriste, l'infiniment grand et l'infiniment pe
ne sont que l'illimités.

L'Empiriste n'admet aucune longueur exacte.

Le rapport de dépendance le plus simple est la proportion
On cherche à le retrouver dans les fonctions en général ; d'où la
« Dans le concept de la tangente est impliqué le retour
dépendance sans restriction à la proportionnalité. » Figur

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = a + \varepsilon \qquad \varepsilon \text{ tendant vers } 0$$

Cette relation contient le retour de la dépendance générale
proportionnalité ; elle est le fondement du calcul diff

Fonctions orthoïdes = qui ont une dérivée.

nception empiriste du calcul différentiel, avec des ε ayant pour limite zéro. (Équations imparfaites de Carnot) Comme les quations différentielles initiales sont homogènes par rapport aux ~~différentielles~~ et aux ε, les équations finales le sont aussi «et toute partie qui dépend des ε dans les équations qui portent sur des otients différentiels disparaîtra exactement comme si nous avions laissé de côté dans les équations primitives» Ainsi justifie la forme idéaliste donnée aux équations différentielles inexacte au point de vue empiriste, parce qu'on supprime les ε correction.) $dy = f(x)\,dx$.

L'auteur écarte la conception intermédiaire de la différentielle mme quantité évanouissante, sans cesse en mouvement. C'est compromis bâtard entre la conception idéaliste (dx infiniment tit réel et fini) et la conception empiriste (dx fini et suffisamment petit, mais également au repos.) Cette représentation de quantités santes naît d'un idéalisme obscur ou timide.

Anorthoïdie permanente des fonctions, non plus en des points és, mais en tous les points. Cette propriété résulte de la nception numérique de l'argument, de la distinction des valeurs tionnelles et irrationnelles, algébriques et transcendantes — emple (Riemann): Soit une suite de fonctions

$$\varphi_1(x), \quad \varphi_2(x), \quad \varphi_3(x) \ldots$$

ont la première saute pour toutes les valeurs entières de l'argument, 2e pour les multiples de $\frac{1}{2}$, la 3e pour les multiples de $\frac{1}{4}$, si l'on forme la somme $\lambda_1\varphi_1(x) + \lambda_2\varphi_2(x) + \ldots\ldots$ les λ représentant des coefficients numériques choisis de façon endre la série convergente on aura une fonction qui saute

dans tout intervalle si petit qu'il soit. — C'est Dirichlet
Riemann qui ont donné au concept de fonction toute
généralité en envisageant des dépendances anorthoïdes
Conclusion de l'Empiriste : Le fini suffit à l'édification
mathématiques. On ne doit admettre que des quantités suffisamment
grandes et suffisamment petites selon les conditions du pr
— Le Idéaliste « Une fonction qui prend une valeur pour
rationnelles de l'argument, et une autre valeur pour les
irrationnelles, est une fonction incomplètement déterminée
condition à laquelle elle est assujettie ne la fait pas correspondre
l'ensemble de toutes les valeurs de l'argument. On ne pourrait
l'imaginer représentée par une figure idéale (une courbe)
une fonction donnée par une loi complète. »

La distance de deux points singuliers voisins d'une fonction
anorthoïde n'est pas d'une petitesse illimitée (elle ne dépend
nous) mais bien infiniment petite — Ainsi l'équivalent
trique des fonctions anorthoïdes est en quelque sorte la repr
de l'infiniment petit.

Chap. II. Considérations finales sur l'idéalisme et l'em
et sur le concept de limite

Mode d'exposition neutre de la théorie des fonctions.
Les deux conceptions sont également logiques et ont la même
Il faut exclure les idées d'un fini, que l'empiriste rejette
faire l'idéaliste par des raisonnements d'une exactitude
Donc : langage empiriste, preuves idéalistes.

Genèse du concept de limite. Discussion de l'A
Il y a union dans l'intuition d'un phénomène fixe et d'une suite intermi

phénomènes variables qui pourtant ont pour terme le phénomène fixe.
mobile soit de la suite illimitée des points $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \ldots\ldots$
ur atteindre brusquement, sans transition, le point final 1.
L'expérience nous apprend à distinguer la variation sans limites (infinité du temps et de l'espace) des variations limitées (max. & min.)
Le concept scientifique de limite comprend en outre les conditions pour qu'une suite de valeurs d'une variable aient une limite –
[Principe général de convergence ~~et de~~ ou divergence de Du Bois Reymond]
On démontre que la limite d'une variable continue x peut être considérée comme la limite d'une suite discontinue de nombres décimaux ou ~~de~~ d'une fraction systématique.

Chap. III. L'argument.

L'argument peut être conçu soit comme un point (extrémité d'une longueur ayant une origine fixe) soit comme un nombre (mesurant cette longueur par rapport à une unité donnée.)
Quand on partage une longueur en deux parties, il n'y a pas d'ambiguïté possible, parce que les 2 parties sont aussi des longueurs (semblables au tout). Mais quand on partage une étendue d'argument, par ex. l'intervalle (0, 1) par un point x_1, il faut indiquer à laquelle des 2 parties appartient le point x_1, parce que l'étendue d'argument est conçue comme composée de points. L'étendue d'argument n'est donc pas une véritable longueur (quoique chaque valeur isolée de l'argument en soit une) mais une suite de valeurs ordonnées linéairement suivant leur grandeur, de telle sorte qu'une valeur déterminée ne s'y présente qu'une fois (comme dans la suite des nombres entiers numériques). – Le mode d'intuition empiriste où les longueurs se composent de points, fournit une image du partage de l'argument.

Quand un ensemble de points est réparti sur un inter-
de telle sorte que toute partie de l'intervalle si petite qu'e-
contienne de ces points, on l'appelle pantachie.

Si dans aucune partie de l'intervalle si petite qu'elle so-
tition des points n'est pantachique, on appelle cette dis-
apantachie

Exemple de pantachie : les nombres rationnels ; les n-
décimaux ; les nombres dyadiques ($z = \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{4} + \dots$
A fortiori l'ensemble des valeurs réelles de l'intervalle (0,

Pantachie illimitée (nombre fini de points aussi grand qu-
de manière à en avoir au moins ~~un~~ dans tout intervalle si
soit.) Pantachie ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ complète (c'est
nombres réels, c-à-d. des points limites d'une pantachie

Pantachie infinie (la pantachie complète est infinie
encore infinies mais non complètes si l'on en retranche ~~supprime~~ un
~~points d'une~~ illimitées, par ex. si on supprime tous les points

Apantachies limitées : systèmes isolés ; illimitées : systèmes ayant 1 ou
points limites ; par ex. $\sin\frac{1}{x} = 0$; $\sin\frac{1}{\sin ax} = 0$,

$$\sin\frac{1}{\sin\frac{1}{x}} = 0 \; ; \; \sin\frac{1}{\sin\frac{1}{\sin ax}} = 0 \; ; \; \sin\frac{1}{\sin\frac{1}{\sin\dots\sin}}$$

On a ainsi des points de convergence de n^e ordre.
Si l'on supprime les points de convergence de n^e ordre,
points de convergence d'ordre $(n-1)$, et ainsi de suite, j-
qu'à ce qu'on obtienne un système isolé.

Apantachie ne se laissant pas réduire à un système isolé
une étendue $(\alpha\beta)$ de l'intervalle $(0,1)$ puis ~~une~~ deux étendues
dans les intervalles (0α) et $(\beta 1)$ puis 4 étendues dans les
(0γ), $(\delta\alpha)$, $(\beta\varepsilon)$ $(\zeta 1)$ etc. La somme des étendues

être égal à 1, par ex. si: $\alpha\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma\delta = \varepsilon\zeta = \frac{1}{8}$, etc.

car $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots\dots$

ou inférieure à 1. Dans le 1er cas seulement le système est intégrable.

Ensembles ~~[illegible]~~ dénombrables (Cantor) c.à.d. tels qu'à tout nombre entier corresponde un élément, et que tout élément corresponde à un nombre entier distinct.

Puissance relative des ensembles. — Les ensembles dénombrables (pantachies illimitées) sont de puissance moindre que le continuum des nombres (Cantor) ou pantachie complète.

Au contraire, les pantachies infinies ont la même puissance que la pantachie complète (Cantor).

Le concept empiriste d'ensembles illimités est identique au concept d'ensembles dénombrables.

Pour l'empiriste, il n'y a pas de pantachie complète. Le continuum des nombres n'existe pas pour lui, ni comme limite des pantachies illimitées, ni comme terme final d'une approximation.

Les pantachies illimitées suffisent à l'analyse. Nulle part il n'est nécessaire de considérer la pantachie complète, le continu.

La continuité étant incompréhensible (pour l'empiriste) la géométrie et la mécanique décomposent les lignes en éléments, c.à.d. les recouvrent de pantachies illimitées de points, qu'un point mobile est supposé parcourir successivement.

Les pantachies complètes ou seulement infinies appartiennent à l'idéaliste; elles sont hétérogènes aux pantachies illimitées, et celles-ci ne peuvent être considérées comme des approximations de celles-là. — De même que l'infini moins une quantité finie reste infini, de même ~~la pantachie~~ le continuum des nombres reste une pantachie infinie,

quand on en retire des pantachies illimitées.

Chap. IV. La fonction

Fonctions anor[males]

Ia. $f(x) = 3x$ pour les valeurs: $0,3$, $0,33$, $0,33[3]$

$f(x) = 0$ pour $x = \frac{1}{3}$.

Ib. $f(n) = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ défini pour les val. ent. d[e n]

IIa. $f(x) = 1$ pour les valeurs rationnelles de x;

$f(x) = 0$ pour les valeurs irrationnelles de x.

IIb. $f(x) = \dfrac{1}{p_1 p_2 \ldots p_r}$ pour: $x = \dfrac{Z}{p_1^{\rho_1} \cdot p_2^{\rho_2} \cdots p_r^{\rho_r}}$

($p_1 p_2 \ldots p_r$ nombres premiers, $Z, \rho_1 \rho_2 \ldots \rho_r$ nombres entie[rs])

$f(x) = 0$ pour toutes les autres valeurs de x.

IIc. $f(x) = x$ pour: $x = \dfrac{Z}{p_1^{\rho_1} \cdot p_2^{\rho_2} \cdots p_r^{\rho_r}}$

$f(x) = 0$ pour toutes les autres valeurs de x.

Fonctions orthoïdes:

III. $\frac{1}{x}$, $\sin\frac{1}{x}$, $x\sin\frac{1}{x}$, $e^{\frac{1}{x}}$, $\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}$

IV. $f(x) = \lim\limits_{h=\infty} \dfrac{1+hx}{1+hx^2}$, $f(x) = \operatorname{arctg} hx$

V. $f(x) = \sum\limits_{p=0}^{p=\infty} \dfrac{\cos m_p x}{\mu^p}$

Valeurs indirectes = limites des valeurs directes de la f[onction] quand x s'approche indéfiniment d'une valeur d[onnée].
Ainsi la fonction Ia a pour valeur directe: $f(\frac{1}{3}) = [0]$
et pour valeur indirecte $f(\frac{1}{3}) = 1$.

Notation de Dirichlet. $\lim\limits_{\varepsilon=0} f(x+\varepsilon) = f(x+0)$ $\lim\limits_{\varepsilon=0} f(x-\varepsilon) = f[(x-0)]$

$f(x) = \frac{1}{x}$ n'a pas de valeur directe pour $x = 0$; elle a deux valeurs [no]n directes : $f(x+0) = +\infty$ $f(x-0) = -\infty$.

[2. 33] $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ a les valeurs indirectes $f(0+0) = +\infty$, $f(0-0) = 0$.

$f(x) = \lim_{h=\infty} \frac{1+hx}{1+hx^2} = \frac{1}{x}$ pour $x \gtrless 0$, et 1 pour $x = 0$.

[in]t. d. Valeurs indirectes pour $x = 0$: $+\infty$, $-\infty$.

[S]aut des fonctions = limite de l'oscillation d'une fonction dans [u]n intervalle infiniment petit entourant le point considéré.

[La] fonction II a a pour toute valeur de x un saut égal à 1.

[Le] saut, comme la continuité, ~~est~~ peut être unilatéral pour une [v]aleur donnée, $x-0$ ou $x+0$. – Une fonction est continue en [un] point si en ce point le saut a une valeur nulle.

[L]a fonction $x \sin \frac{1}{x}$ ne peut être continue pour $x = 0$ que [si] on lui attribue en ce point la valeur 0 (car $0 \sin \infty$ n'a pas de sens.)

[L]es fonctions II a, II b ne sont continues en aucun point.

[La] fonction II c est continue pour tous les points irrationnels, [d]iscontinue pour les points rationnels.

Les fonctions III et IV sont toutes discontinues pour $x = 0$.

Les fonctions anorthoïdes ne peuvent correspondre à aucune [im]age (géométrique), et nulle image de fonction ne peut être [en]visagée comme approximation d'une pareille fonction. »

[C]hap. V. Marche finale des fonctions.

[Pr]incipe général de convergence et de divergence ; limites d'indéterminé[es] des fonctions pour $x = \infty$ (cf. Stolz, Allgemeine Arithmetik.)

$$\lim f(x) = \frac{O+U}{2} + j\,\frac{O-U}{2} \qquad 0 \leqq j \leqq 1 .$$

[Si] $f(x-0)f(x)$ est continue, j prend toutes les valeurs de l'intervalle $(0, 1)$

Exemples: $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \cos \alpha x$, $f(x) = e^{-\frac{1}{x}} \cos \alpha x$. $O = +1$,

$$\lim_{x=\infty} f(x) = \frac{1-1}{2} + j\,\frac{1+1}{2} = j.$$

$\varphi(n) = \sin \frac{n\pi}{m}$, $f(x) = \varphi(n)$ pour $n \leqslant x < n+1$:

~~$\varphi(n) =$~~ Si m est pair: $\left.\begin{matrix} O \\ U \end{matrix}\right\} = \pm 1$; si m est impair: $\left.\begin{matrix} O \\ U \end{matrix}\right\} = \pm$

Enveloppes d'indétermination

Soit une fonction $f(x)$ dont l'argument croît indéfin[iment]
il existe toujours 2 fonctions $O(x)$ et $U(x)$ qui possèdent les
suivantes: 1° Chacune de ces fonctions varie dans un seul [sens]
mais peut aussi être constante;

2° x croissant indéfiniment, $O(x) - f(x)$ et $f(x)$
s'annulent une infinité de fois;

3° On a toujours: $O(x) \geqslant f(x) \geqslant U(x)$

le cas où $f(x)$ varie dans un sens unique: $O(x) = f(x)$

4° Lorsque les fonctions $O(x)$ et $U(x)$ ont des limites,
les limites d'indétermination O et U de $f(x)$ pour x

Exemples: $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \cos x$, $O(x) = +e^{\frac{1}{x}}$ $U(x) =$

$f(x) = e^{-\frac{1}{x}} \cos x$, $O(x) = +e^{-\frac{1}{x}}$ $U(x) =$

$f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} \cos x$, $O(x) = +\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$, $U(x) = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$, $O = U =$

24 types de marche d'une fonction (a = augmente, d = di[minue], c = c[onstante])

	$O(x)$	$U(x)$	
1° $O(x)$, $U(x)$ n'ont pas de limites:	$+\infty$	$+\infty$	1
	$+\infty$	$-\infty$	1
	$-\infty$	$-\infty$	1
2° $O(x)$ ou $U(x)$ a une limite:	$+\infty$	a, d, c	3
	a, d, c	$-\infty$	3
3° $O(x)$ et $U(x)$ ont chacune une limite: $O > U$	a, d, c	a, d, c	9
4° Les deux lim. sont égales: $O = U$	a, d, c	a, d, c	5
5° $O(x) = f(x) = U(x)$			1

Calcul infinitaire. Soient 2 fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ croissant indéfiniment. On dit que $f(x)$ croît plus vite que $\varphi(x)$, si à partir d'une certaine valeur de $\underline{x}$ on a toujours $f(x) > \varphi(x)$, et si la différence $f(x)-\varphi(x)$ augmente avec $\underline{x}$.

On écrit : $f(x) \text{ inf} > \varphi(x)$, si $\lim \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \infty$.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \text{ inf} > \varphi(x), \text{ si } \lim \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \infty. \\ f(x) \text{ inf} < \varphi(x), \text{ si } \lim \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = 0. \\ f(x) \text{ inf} = \varphi(x), \text{ si } \lim \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} \text{ est finie} \end{array}\right\} \text{pour } x=\infty.$$

Les mêmes notations serviraient pour le cas où les 2 fonctions vont en décroissant indéfiniment.

On peut ranger les fonctions par ordre d'inégalité infinitaire : par ex :

$$(\log_3 x)^\mu, (\log_2 x)^\mu, (\log x)^\mu, x^\mu, \dots e^{\mu x^k}, \dots e^{\mu e^{\mu_1 x^k}}, \dots\dots$$

Le quotient d'une fonction à la précédente se ramène à $\dfrac{x}{\log x}$ ou $\dfrac{e^x}{x}$, et plus généralement à : $\dfrac{e^{\mu x^k}}{x^m}$

Or $e^{\mu x^k} = \sum \dfrac{\mu^n x^{nk}}{n!}$ $\qquad \dfrac{e^{\mu x^k}}{x^m} = \sum \dfrac{\mu^n x^{nk-m}}{n!}$

et comme, si grand que soit m et si petit que soit k, $(nk-m)$ finit par devenir positif pour $\underline{n}$ suffisamment grand, la limite de $\dfrac{e^{\mu x^k}}{x^m}$ est l'infini. De même : $\dfrac{e^{\mu e^{\mu_1 x^k}}}{e^{m x^k}}$

Prenons le logarithme : $m x^k\left[\dfrac{\mu e^{\mu_1 x^k}}{m x^k} - 1\right]$

Il devient infini avec $\underline{x}$, d'après ce qui précède.

Entre deux fonctions u_1, u_2, telles que $u_1 \text{ inf} < u_2$, on peut intercaler une infinité de fonctions inégalement infinies :

$u_1 \text{ inf} < u_1 x^\mu (\log x)^{m_1} (\log_2 x)^{m_2} \ldots\ldots (\log_k x)^{m_k} . \text{ inf} < u_2$

On peut aussi insérer de nouveaux termes infinitaires entre les paramètres μ par des fonctions ; par exemple (0 <

$$(\log x)^m \text{ inf} < (\log x)^{(\log x)^\mu} \text{ inf} < x^m$$

La suite de ces fonctions inégalement infinies constitu
<u>pantachie infinitaire</u>. Toutes les fonctions $\varphi(x)$ qui
l'équation infinitaire : $\varphi(x) \text{ inf} = f(x)$
forment avec $f(x)$ un <u>point infinitaire</u> (comme égalem
La suite des points infinitaires forme un <u>continu</u> infi
infiniment plus dense que le continu linéaire (pantachie
Si l'on coupe les courbes ~~qu~~ représentatives des fonction
droite perpendiculaire à Ox, qu'on rejette à l'infini, l
de cette droite sont l'équivalent géométrique de la pantachie
L'auteur croit que la pantachie infinitaire est d'une p
supérieure à la pantachie complète (ensemble des nombre
(cf. <u>Stolz</u>, Allgemeine Arithmetik, t. I, ch. IX.)

Paul du Bois Reymond, à Tubingue.

Ueber asymptotische Werthe, infinitäre Approximationen und infinitäre Auflösung von Gleichungen

ap. Mathematische Annalen, t. VIII. 1875.

Cf. Sur la grandeur relative des infinis des fonctions,

ap. Annali di Matematica, série IIa, t. IV, p. 338.

et Théorème général concernant la grandeur relative des infinis des fonctions et de leurs dérivées.

ap. Journal de Borchardt, t. 74, p. 294.

Les divers infinis des fonctions forment un domaine de grandeurs, dit infinitaire.

L'infini de $\varphi(x)$ est dit égal à celui de $\psi(x)$, ou supérieur, ce qui s'écrit: $\varphi(x) \sim \psi(x)$, $\varphi(x) \succ \psi(x)$ suivant que le quotient: $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ est fini ou infini.

Le quotient joue le même rôle que la différence parmi les nombres ordinaires. Symétrie du Devenir-nul et du Devenir-infini: aux fonctions qui deviennent infinies correspondent les nombres positifs, aux fonctions qui deviennent nulles, les nombres négatifs, aux fonctions qui restent finies, le zéro.

Les points fixes du domaine infinitaire sont les fonctions exponentielles, les puissances et les logarithmes, qui jouent le même rôle que les nombres fixes dans le domaine des nombres.

On ne peut pas toujours enfermer un infini donné entre deux infinis de cet ensemble (comme on enferme un nombre qcq. entre deux autres) car il y a des décroissements tellement lents qu'ils restent au dessous de $\log\log\log \ldots \log x$ (si nombreux que soient les log)

Cf. Eine neue Theorie der Convergenz und Divergenz von Reihen..

ap. Journal de Borchardt, t. 76.

et des accroissements si rapides qu'ils dépassent ~~toute~~ exponentielle (noch so hoch gethürmte) : $e^{e^{e^{\cdots}}}$

On ne peut trouver aucune fonction $\lambda(x)$ telle, qu'on puisse former avec elle une fonction $\lambda(\lambda(\lambda(\ldots\lambda(x))))$ qui dépasse tout infini si grand ou si petit qu'il soit.

« Cette recherche des infinis des fonctions est née du besoin de démontrer ~~en~~ d'une manière générale certaines propositions sur la convergence et la divergence des séries de Fourier, en tenant compte de leur domaine de validité. »

– De même que l'on considère le devenir nul de la différence

$$f(x+a) - f(x)$$

quand x restant fini, a devient infiniment petit, on peut rechercher comment cette différence se comporte dans le cas où quand x devient infiniment grand et a reste fini, ou est d'un infini ~~plus~~ inférieur à x

I. Formules pour les valeurs asymptotiques finies.

1. Formules fondamentales simples pour val. asympt.

De la formule de Lagrange:

$$f(x+a) = f(x) + af'(x) + \frac{a^2}{1.2} f''(x) + \dots + \frac{a^n}{n!} f^n(x+\alpha) \qquad (0<\alpha<a)$$

Il résulte pour $n=1$ et $x=\infty$, à la condition que $\lim\limits_{x=\infty} f'(x)$ soit finie et déterminée:

$$(\mathrm{I}) \qquad \lim\left[f(x+a) - f(x)\right] = a \lim f'(x)$$

$$(\mathrm{II}) \qquad \lim \frac{f(x)}{x} = \lim f'(x)$$

car: $$f'(x+\alpha) = \left(1+\frac{x}{a}\right)\left[\frac{f(x+a)}{x+a} - \frac{f(x)}{x+a}\right] \qquad (\alpha)$$

où l'on fait a, puis x infini.

En général, pourvu que $f^n(\infty)$ soit finie et déterminée, on a:

$$(\mathrm{I}^n) \qquad \lim\left[f(x+a) - f(x) - af'(x) - \dots - \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(x)\right] = \frac{1}{n!} \lim f^n(x)$$

$$(\mathrm{II}^n) \qquad \lim \frac{f(x)}{x^n} = \frac{1}{n!} \lim f^n(x)$$

celle-ci résulte de:

$$\frac{1}{n!} f^n(x+\alpha) = \left(1+\frac{x}{a}\right)^n \left[\frac{f(x+a)}{(x+a)^n} - \frac{f(x) + af'(x) + \dots + \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(x)}{(x+a)^n}\right]$$

Si dans (α) on fait x, puis a nul on trouve

$$(\mathrm{II}_0) \qquad \lim_{x=0} \frac{f(x)}{x} = f'(0) \qquad \text{si: } f(0) = 0$$

En général: $$\lim_{x=0} \frac{f(x)}{x^n} = \frac{f^n(0)}{n!} \qquad \text{si: } f(0) = f'(0) = \dots = f^{n-1}(0) = 0.$$

2. Formules de limites déduites des précédentes.

$$(\mathrm{I}_a) \qquad \lim \frac{f(x+a)}{f(x)} = e^{a \lim \frac{f'(x)}{f(x)}}$$

$$(\mathrm{II}_a) \qquad \lim f(x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim \frac{f'(x)}{f(x)}}$$

$$(\mathrm{II}_{a0}) \qquad \lim_{x=0} f(x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{f'(0)}{f(0)}} \qquad \text{si: } f(0) = 1.$$

(I') $\lim\left[f(ax) - f(x)\right] = \log a \lim x f'(x)$

(I'') $\lim\left[f(x^a) - f(x)\right] = \log a \lim . x \log x f'(x)$

(I'_a) $\lim \dfrac{f(ax)}{f(x)} = a^{\lim x \frac{f'(x)}{f(x)}}$

(I''_a) $\lim \dfrac{f(x^a)}{f(x)} = a^{\lim x \log x \frac{f'(x)}{f(x)}}$

(II^n) $\lim \dfrac{f(x)}{\log_n x} = \lim x \log x \dots \log_{n-1} x f'(x)$

(II^n_a) $\lim f(x)^{\frac{1}{\log_n x}} = e^{\lim x \log x \dots \log_{n-1} x \frac{f'(x)}{f(x)}}$

(III) $\lim\left[f(x+a) - f(x)\right] = a \lim \dfrac{f(x)}{x}$

(III') $\lim\left[f(ax) - f(x)\right] = \log a \lim \dfrac{f(x)}{\log x}$

(III'') $\lim\left[f(x^a) - f(x)\right] = \log a \lim \dfrac{f(x)}{\log\log x}$

(III_a) $\lim \dfrac{f(x+a)}{f(x)} = \lim f(x)^{\frac{a}{x}}$

(III'_a) $\lim \dfrac{f(ax)}{f(x)} = \lim f(x)^{\frac{\log a}{\log x}}$

(III''_a) $\lim \dfrac{f(x^a)}{f(x)} = \lim f(x)^{\frac{\log a}{\log\log x}}$

On trouve d'autres formules de limites pour $x = 0$.
(Les précédentes sont pour $x = \infty$)

Paul du Bois-Reymond: Zwei Sätze über Grenzwerthe von Functionen zweier Veränderlichen

op Mathematische Annalen t XI (1877)

1. Fonction de deux variables: $u = f(x, y)$

Pour valeur de $f(x, y)$ on prendra la plus grande, en valeur absolue, de celles de: $f(x \pm \varepsilon, y \pm \varepsilon_1)$

quand ε, ε_1 tendent vers zéro, soit l'un après l'autre, soit en même temps suivant une loi quelconque.

$f(y)$ est la fonction à une variable qu'on obtient en fixant x.

Grundsatz. Si une fonction $f(y)$ ~~vérifie~~ remplit la condition:

$$\lim_{y=0} f(y) = 0$$

il y a toujours une valeur y_1 qui vérifie les relations suivantes:

1° $0 < y_1 \leq \varepsilon$ (ε nombre positif aussi petit qu'on veut),

2° $[f(y_1)]^2 \leq \xi$ (ξ nombre positif quelconque)

3° $[f(y)]^2 \leq [f(y_1)]^2$ pour toute valeur y de l'intervalle $(0, y_1)$

2. Proposition I. Si pour toute valeur x de l'intervalle $(0, X)$ la fonction $f(x, y)$, considérée comme fonction de y, remplit la condition:

$$\lim_{y=0} f(x, y) = 0$$

de sorte qu'on a aussi: $\lim_{x=0} \left[\lim_{y=0} f(x, y) \right] = 0$

il y a toujours une fonction $\varphi(x)$ qui s'annule sans maxima avec x, et telle que: 1° $\lim_{x=0} f(x, \varphi(x)) = 0$

2° $\lim_{x=0} f(x, \varphi_1(x)) = 0$

à la condition qu'au dessous d'une certaine valeur de x on ait toujours: $\varphi_1(x) < \varphi(x)$

Cf Journal de Borchardt, t. 70: «Bemerkungen über verschiedene Werthe, welche eine Function zweier reellen Functionen erhält, wenn man diese Variabeln entweder nach einander oder gewissen Bedingungen gemäss gleichzeitig verschwinden lässt.» §8.

3. Proposition II. Si pour une fonction $\lambda(x)$ qui s'annule avec x, ainsi que pour toute fonction $\lambda_1(x) < \lambda(x)$ on a :

$$\lim f(x, \lambda(x)) = 0$$

on a aussi :

$$\lim_{x=0} \left[\lim_{y=0} f(x,y) \right] = 0$$

4. Problème. Quand, de ce que $\lim_{x=0} \left[\lim_{y=0} f(x,y) \right] = 0$ il résulte qu'il y a des fonctions $\varphi(x)$ pour lesquelles on a

$$\lim_{x=0} f(x, \varphi(x)) = 0$$

quel est le plus grand zéro de ces fonctions ou le plus petit infini des fonctions réciproques ?

Ueber die Paradoxen des Infinitärcalcüls.

Les concepts de grandeur et de limite épuisent l'énigme psychologique ~~contenue dans~~ qui sert de matière à la science entière.

Introduction des nombres irrationnels pour exprimer une grandeur qu'aucun nombre rationnel ne peut représenter. Confusion complète des nombres rationnels et irrationnels dans l'Analyse, de même que des segments rat. ou irrat. en Géométrie. La représentation géométrique ne fait aucune différence sur un segment par ex. égal à 1, entre les fractions quantitatives rationnelles de limite et les longueurs irrationnelles qu'on peut construire avec la règle et le compas. Comparaison de la suite des nombres avec la répartition des étoiles dans le ciel.....

De même les nombres rationnels se ~~pressent de plus en plus~~ serrés, mais laissent toujours entre eux dans la représentation denses et (!) des lacunes, que la spéculation mathématique remplit alors avec les irrationnels. Ainsi se développe la représentation de la continuité numérique. Les deux suites de grandeurs, numériques et géométriques, coïncident parfaitement.⊕ Mais elles ne peuvent être amenées à coïncider qu'à l'aide du concept de limite, et par l'introduction de l'irrationnel. C'est là l'origine de la pensée de l'identité des concepts de grandeur et de limite (cf. Cantor).

Après cela, nous pouvons ne voir dans l'intercalation des nombres irrationnels entre les rationnels qu'une adaptation faite après coup (1) du concept intellectuel de nombre ~~au concept de grandeur géométrique~~....

L'auteur se propose de montrer que les infinis des fonctions forment une multitude infiniment plus dense que le continu géométrique et de rechercher la limite idéale entre la convergence et la divergence en définissant avec précision la fonction $\tau(\alpha)$.

⊕ et se correspondent complètement l'un à l'autre, comme le modèle et la copie (wie Bild und Abbild)

(1) eine nachträgliche Anpassung

Sur l'approximation d'un infini donné.

1. Les paradoxes qu'on rencontre dans les principes du calcul infinitaire (comme ceux des éléments de l'Analyse) résultent du contraste entre les nouveaux concepts de nombres et de grandeurs, que l'on s'efforce d'amener à coïncider.

2. Les infinis des fonctions forment, dans l'intuition géométrique, une continuité; de plus, leur nombre est infiniment infini, car entre deux courbes allant à l'infini si rapprochées qu'elles soient, on peut en faire passer une infinité.

3. De même que dans le domaine des grandeurs finies on ne peut donner une représentation ~~exactement~~ numérique exacte des grandeurs qu'au moyen des nombres rationnels (les n. irrationnels n'étant que des limites), on ne peut exprimer les infinis que par des fonctions bien définies, logarithmes, puissances, exponentielles, qui constituent déjà un ensemble infiniment infini.

4. On sait (v. t. VIII) qu'il ne peut y avoir aucune suite de fonctions: $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots \varphi_p(x), \dots$ telle que tout infini, si petit qu'il soit, tombe entre deux infinis de cette suite ou coïncide avec l'un d'eux.

5. Dans les grandeurs finies, on peut approcher indéfiniment d'une valeur quelconque. Dans les infinis, l'approximation n'est pas indéfinie. — Par ex. on approche de la valeur 1 par la suite: $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots \frac{n}{n+1}, \dots$

mais si l'on essaie d'approcher de x par la suite de fonctions

$$x^0, x^{\frac{1}{2}}, x^{\frac{2}{3}}, x^{\frac{3}{4}}, \dots x^{\frac{n}{n+1}}$$

il y a toujours des infinis compris entre ceux-là et celui de x, par ex:

$$x^{\frac{n}{n+1}} < x^{\frac{lx}{lx+1}} < x$$

Proposition : On ne peut s'approcher d'un infini donné $\lambda(x)$ par aucune suite de fonctions : $\varphi_p(x)$ $\quad p = 1, 2, \ldots$ de telle manière, qu'on ne puisse pas toujours trouver des fonctions $\psi(x)$ qui, pour des valeurs de p aussi grandes qu'on veut, satisfassent à l'inégalité : $\lambda(x) > \psi(x) > \varphi_p(x)$

7. Sous la condition que : $\rho(x) < lx$
on a pour toute valeur de n :

$$x^{\frac{n}{n+1}} < x^{\frac{\rho(x)}{\rho(x)+1}} < x$$

8. On ne peut par plus arriver à une approximation indéfinie d'un infini donné par une suite doublement, triplement ... infinie de fonctions, que par une suite simplement infinie.

9. Ce fait semble en contradiction avec la continuité intuitive, qui n'admet aucune lacune aux environs d'une courbe, par ex de la droite : $y = x$, que ne puisse combler une infinité de courbes infiniment voisines.

L'infini de la fonction : $\quad x^{\frac{llx}{llx+1}}$
est plus rapproché de celui de x que celui de la fonction :
$x^{\frac{n}{n+1}}$ $\quad$ si grand que soit n ;
mais pour chaque valeur de x il y a une valeur de n telle, que :

$$x^{\frac{n}{n+1}} > x^{\frac{llx}{llx+1}}$$

Ainsi les courbes $y = x^{\frac{n}{n+1}}$ s'approchent infiniment de la ligne droite $y = x$, de sorte que dans le fini on ne peut intercaler aucune courbe entre la droite et la suite des courbes $(n = 1, 2, \ldots)$
Mais, à l'infini, au contraire, on a :

$$x^{\frac{llx}{llx+1}} > x^{\frac{n}{n+1}}$$

pour n'importe quelle valeur de n.
Ainsi s'explique ce paradoxe, qui n'est pas une contradiction.
C'est une lacune dans l'analogie des grandeurs ordinaires et infinitaires.

II. Sur la limite de la convergence et de la divergence

10. On va rencontrer un autre paradoxe, qui résulte au contraire de l'analogie des grandeurs numériques et des gr. infinitaires. On sera obligé d'admettre l'existence d'un certain infini, pour éviter des absurdités analytiques et d'autre part on peut prouver rigoureusement que cet infini n'existe pas ou du moins ne peut être représenté par aucune fonction.

Cet infini irreprésentable mais réel, correspond précisément à la limite entre la convergence et la divergence des opérations infinies (intégrales et séries)

11. Considérons l'intégrale: $J = \int_0^a \frac{t(\alpha)}{\alpha} d\alpha$

$t(\alpha)$ et tend sans maxima vers $t(0)$ quand α tend vers 0. Donc $J = \lim_{\varepsilon=0} \int_\varepsilon^a \frac{t(\alpha)}{\alpha} d\alpha$

infini, lorsque: $t(\alpha) \sim 1$.

On considérera donc seulement les fonctions: $t(\alpha) < 1$, et qui ne croissent jamais de $t(\alpha)$ à $t(0)$. J sera fini ou infini

Si l'on pose: $t_u(\alpha) = \dfrac{1}{l\frac{1}{\alpha}\, l_2\frac{1}{\alpha} \dots l_r \frac{1}{\alpha}}$

$$t_0(\alpha) = \frac{1}{l\frac{1}{\alpha}\, l_2\frac{1}{\alpha} \dots l_r\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1+\mu}} \qquad \mu > 0$$

J sera infini dans le 1er cas, fini dans le 2e, si grand que soit r, si petit que soit μ.

Si l'on conçoit que $t(\alpha)$ parcourt tous les degrés de la vitesse du devenir nul, depuis $t_u(\alpha)$ jusqu'à $t_0(\alpha)$, il y aura un moment où l'intégrale J de finie, deviendra infinie. A ce moment la fonction $t(\alpha)$ est $\tau(\alpha)$; c'est la limite qui sépare les fonctions $t(\alpha)$ pour lesquelles J est finie de celles qui rendent J infinie. Ou bien J est fini pour $t \gtrsim \tau$ et infini pour $t > \tau$ ou bien J est fini pour $t < \tau$ et infini pour $t \gtrsim \tau$

12. Il n'y a aucune fonction τ qui vérifie la 1e hypothèse.
14. Il n'y a aucune fonction τ qui vérifie la 2e hypothèse.
16. Donc à moins de supposer que pour $\tau(\alpha)$ l'intégrale I n'est ni finie ni infinie, la limite de divergence et de convergence ne peut se représenter par aucune fonction.

On a déjà prouvé (Borchardt, t. 76) qu'on ne peut approcher indéfiniment de cette fonction-limite $\tau(\alpha)$ au moyen des critères logarithmiques. Il est maintenant démontré qu'elle n'existe pas.

D'autre part, en vertu de notre représentation innée des grandeurs comme continues (par l'intuition géométrique) on ne peut admettre qu'il n'y ait pas de degrés intermédiaires formant une transition continue entre le devenir nul de :

$$\frac{1}{l\frac{1}{\alpha}\, l_2\frac{1}{\alpha} \dots l_r\frac{1}{\alpha}} \quad \text{et de :} \quad \frac{1}{l\frac{1}{\alpha}\, l_2\frac{1}{\alpha} \dots l_r\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1+\mu}}$$

On ne peut lever cette contradiction qu'au moyen de l'analogie avec les nombres : les fonctions qui deviennent infinies sont comparables aux nombres rationnels ; elles sont les véritables grandeurs infinitaires, mais elles n'en sont pas les limites. Les logarithmes, les puissances, les exponentielles, et en général toute loi de croissance régulière à l'infini, constituent l'infini rationnel.

De même que, malgré la densité illimitée (la connexité) de la suite des nombres rationnels, on est obligé pour des raisons géométriques et analytiques d'admettre des grandeurs non exprimables par ces nombres ; de même, dans la suite des grandeurs infinitaires, on est amené à concevoir une façon de croître indéfiniment qui n'est pas susceptible de représentation analytique.

La limite idéale entre la convergence et la divergence est un infini irrationnel. La fonction τ est comparable au nombre π, qui désigne une grandeur qu'on enferme entre une double suite de grandeurs exprimables par des nombres rationnels.

17. L'introduction de l'irrationnelle $\tau(\alpha)$ dans le calcul est moins choquante, si l'on entend par $\tau(\alpha)$, non la limite exacte de convergence et de divergence, mais ~~une fonction~~ un infini qcque qui s'en approche plus que toutes les fonctions dont nous dispo[sons]. Il suffit d'imaginer une fonction $\tau(\alpha)$ qui vérifie l'inégalit[é]

$$\frac{1}{l\frac{1}{\alpha}\, l_2\frac{1}{\alpha} \cdots l_r\frac{1}{\alpha}} < \tau(\alpha) < \frac{1}{l\frac{1}{\alpha}\, l_2\frac{1}{\alpha} \cdots l_r\frac{1}{\alpha}^{1+\mu}}$$

pour toute valeur finie de r, et pour μ aussi petit qu'on veut.

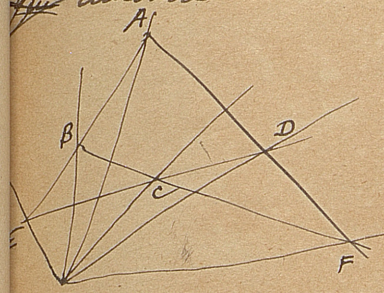
L'introduction de la fonction $\tau(\alpha)$ dans le calcul infinitai[re] est très utile, parce qu'on peut calculer avec elle sans la connaî[tre] et qu'on peut l'éliminer des relations infinitaires par la différentiation.

A ceux qui croient impossible un calcul portant sur des nombres sans unité, l'auteur répond qu'on peut toujours définir des opérations de calcul avec des éléments auxquels est assigné un certain ordre. Depuis longtemps ~~en Géométrie~~, on a pensé à constituer une Géométrie indépendante de la mesure des longueurs, et ~~cette~~ idée a été réalisée de nos jours par Poncelet, Riemann, Listing etc. De même dans l'Analyse le nuage de l'infini doit s'incorporer dans une méthode de calcul sans nombres.

Chasles. — Notes.

~~II. Construction des spirales comme intersections de la~~
~~[sur]face hélicoïde et d'une surface de révolution, et~~
~~[cor]respondance des spirales avec les méridiennes des ces~~
~~[sur]faces de révolution~~.

Involution de 6 dr.
Les 6 tg. menées d'un même p. à 3 coniques inscrites ds
un quadril. forment un faisceau en involution
Cas partic. : les 6 dr. menées d'un même p. aux 6 sommets
~~et aux p. de conc. des~~ d'un quadril. complet forment
un faisceau en involution ; donc toute transversale
~~qui~~ rencontre ces 6 dr. en 6 p. qui sont en involution



Maurolicus : de lineis Horariis libri III
(1553, 1575). La pointe du style
décrit une conique   algebra
Usage des lettres en Arithmétique

Guarini : Euclides adauctus et methodicus
mathematicaque universalis (Turin, 1671.)
Mathematica cœlestis (Milan, 1683)
Placita philosophica (Paris, 1666)

Chasles : Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie (1837)
Seconde édition, Gauthier-Villars, 1875.

1e époque

Thalès (639 – 548)

Pythagore (580 –) Incommensurables ; corps réguliers.
Carré de l'hypoténuse

Platon (430 – 347) Sections coniques ; lieux géométriques.

Hippocrate de Chio (450) Quadrature des lunules.
Duplication du cube ; trisection de l'angle

Menechme, Eudoxe, disciples de Platon.

Archytas : 1e courbe à double courbure

Aristée (350) sections coniques.

Dinostrate : quadratrice (pour la division des angles et la quadrature du cercle) [frère de Menechme]

Perseus : spiriques.

Euclide (285) Éléments ; Data. Sections coniques ; lieux à la surface ; porismes.

Archimède (287 – 212) Quadrature de la parabole
Spirales, π.

Apollonius (247) Coniques. Maxima et minima

Ératosthène (276 –) Mésolabe (2 moy. proport.)

Nicomède (150) Conchoïde

Hipparque (150) Astronome ; trigonométrie sphérique

Géminus (100) Hélice circulaire

Théodose (100) Sphériques.

Ménélaüs (80 ap. J.C.) Sphériques. Règle de intersection (ou des transversales à un triangle sphérique)

Ptolémée (125 ap. J.C.) Almageste (trigonométr
rectiligne et sphérique) Théorème sur le quadrilatère ins
Théorème des 6 segments (des transversales) ds le plan et
la sphère. — Théorie des projections — Optique

Pappus (fin du IVe) Collections mathématiques —
Spirale sphérique — Surfaces plectoïdes. Hélic
Rapport anharmonique. Problème ad tres aut plures li
Involution de 4 ou 5 points.

Serenus : sections du cylindre et du cône.

Dioclès ; cissoïde (2 moy. prop.)

Proclus (412–485.) Commentaire sur Euclide

Marinus : préface aux Data d'Euclide

Isidore de Milet : description continue de la pa

Eutocius (540) Commentaires sur Apollonius et Ar
citations précieuses des anciens géomètres.

Héron d'Alexandrie : Pneumatiques. ~~Dioptr~~
Περὶ διοπ
(géodési

Deuxième époque

Viète (1540-1603) Algèbre; construction géométrique des racines du 2e et du 3e degré. – Apollonius Gallus. Cercle tangent à 3 cercles donnés. Zététiques. Trigonométrie sphérique; triangles réciproques.
Snellius invente le triangle sphérique supplémentaire (Trigonométrie, 1627, posthume.) (Harmonices mundi l. V (1619.)
Keppler (1571-1631) Nova stereometria doliorum (1615.) Maxima et minima. Méthode des projections.
Neper: Mirifici logarithmorum canonis descriptio (1614.)
Guldin (1577-1643) règle renouvelée de Pappus (centre de gr.)
Cavalieri (1598-1647) Géométrie des Indivisibles (1635.) Directorium generale uranometricum (1632.) Trigonométrie (1643.)
Roberval (1602-1673.) Méthode des tangentes, par les mouvements composés. – Traité des Indivisibles. De resolutione æquationum.
Fermat (1590-1663.) De maximis et minimis. Méthode des tangentes (en annulant les différentielles.) Calcul des probabilités – Théorie des nombres. Quadratures et rectifications: De linearum curvarum cum lineis rectis comparatione (1660.) Réfraction. Méthode analytique de construction des lieux par coordonnées. De contactibus sphæricis. – Porismes d'Euclide.
Pascal (1623-1662.) Cycloïde (par les indivisibles.) Coniques; hexagramme mystique

Desargues (1593-1662) Coniques ; perspective
transversales. Parallèles = droites concourant à l'inf
(adopté par Descartes, Leibniz et Newton) Systèm
lignes droites assimilés à des lignes courbes.
Involution de 6 points. — Traité de Perspective (1
Triangles homologiques. La Coupe des pierres; les Cadran
Epicycloïdes (dans les engrenages)
[J. Curabelle: Examen des œuvres du Sieur Desargues, Pa
Mydorge (1587-1647) Coniques (1631, 1641.)
Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667) Quadra
Ductus plani in planum. Transformation du cercle en

Albert Girard, dans sa Trigonométrie (1626) fait us
du triangle réciproque. Commentaire des œuvres de Stev
Lattaye
Desargues a conçu les angles trièdres supplémentaires,
résolu graphiquement les problèmes de la trigonométrie sphé

Troisième époque

Descartes (1596–1650) Géométrie (Leyde, 1637)
Racines négatives. – Coefficients indéterminés.
De Beaune (1601–16) Méthode inverse des tangentes
Schooten (–1659.) Exercitationes geometricæ
Description organique des coniques (Proclus, Guido Ubaldi, Stevin.) – Géométrie de la règle
Sluze (1623–1685) Construction des éq. du 3e et du 4e degré.
Hudde (1640–1704) Tangentes.
Jean de Witt (1625–1672) Description des coniques par la ligne droite
Wallis (1616–1703) Traité analytique des sections coniques.
Arithmétique des infinis.
Van Heuraet et Neil: Rectification d'une courbe (la parabole cubique)
Huygens (1629–1695.) Rectification de la cissoïde
Surface des conoïdes. Spirale logarithmique. Chaînette.
De horologio oscillatorio. La cycloïde tautochrone.
Développées. Centre d'oscillation. Force centrifuge
Traité de la Lumière. Surfaces du second degré. Onde réfractée (ovale de Descartes)
Choc des corps (Wallis, Wren) Astronomie
Barrow (1630–1677.) Lectiones Geometricæ (1669.)
Méthode des tangentes. Trad. Euclide, Apollonius, Archimède
Lectiones mathematicæ (1684.) Lectiones opticæ (et Théodose

Tschirnhausen (1651-1708) Caustiques. Medicina
(1686) Génération universelle des courbes; ~~méthode de~~ construction des
des courbes mécaniques, sans infiniment petits.

[Géométrie des anciens; géométrie analytique (Descartes); géom
projective et descriptive (moderne, date de Pascal, Desargues
de Monge et Carnot.]

La Hire (1640-1718) travaille dans la géom. des
et dans la géom. moderne (pure.) Sectiones conicæ (
Epicycloïdes; Traité des roulettes. Conchoïdes. Gnomonique
Continuateur de Pascal et Desargues ds la théorie des
(Précurseurs: Verner, de Nuremberg (1522) Maurolicus
Messine [Venise, 1575]. & Guarini, 1671.) Théorie des
Planiconiques (1673) méthode de transformation des fig

Le Poivre (de Mons) Traité des sections du cylindre et du c
(1704) sans recourir au plan sécant.
La méthode de transformation de La Hire et Le Poivre (
pôle, directrice et formatrice) n'est qu'une forme de persp
(cf. théorie des figures homologiques de Poncelet)

Parent (1666-1716) représente une surface par une éq
à 3 variables (coordonnées ds l'espace; géom. analytique
dimensions. - 1700)

Clairaut (1713-1765) Courbes à double courbure
dénomination due à

Pitot (1695-1771) Hélice circulaire (1724)

[Loxodromie étudiée par Nonius (1492-1577) en 1530
Wright, Stevin, Snellius; c'est la projection stéréograph
de la spirale logarithmique, selon Halley.
La cyclo-cylindrique inventée par Roberval (1630)

par La Loubère (1600-1664)
Spirale conique étudiée par Pascal
Le P. Courcier étudie les sections de la sphère par la sphère, le cylindre et le cône (1663.)
Viviani (1622-1703) propose le problème de la voute quarrable ~~ses~~ (1692) résolu par Wallis, Leibniz et Bernoulli
Herman (1678-1733) invente l'épicycloïde sphérique (1718) courbe rectifiable
Guido Grandi (1671-1742) étudie 2 courbes quarrables sur la sphère
L'Hospital : Traité analytique des sections coniques.
Analyse des infiniment petits.
Le P. Nicolas : Conchoïdes et cissoïdes (Toulouse, 1692)
Jean Ceva : De lineis rectis se invicem secantibus statica constructio (Milan, 1678.)

Quatrième époque

Invention du calcul infinitésimal (1684, 1687)

v. p. 9.

Newton (1642-1727) Transformation des figures
Enumeratio linearum tertii ordinis (1706)
correspondant aux 5 paraboles dont toutes les autres co
sont des projections centrales. Description organique des

Mac-Laurin (1698-1746) Geometria organica (1
De linearum geometricarum proprietatibus generali
Théorème sur la déformation réglée d'un polygone

Cotes (1682-1716) Th. sur le centre des moyennes harm

Braikenridge : Exercitatio geometrica de descriptione
linearum curvarum (1733)

Nicole démontre le th. de Newton sur les courbes du 3e

Bragelongne (1688-1744) Courbes du 4e degré

De Gua (1712-1786) Usage de l'analyse de Descartes
Points singuliers à l'infini (analogie par perspective

Euler (1707-1783) Introductio in analysin infini
(1748) Surfaces du 2e degré.

Cramer (1704-1752) Introduction à l'analyse
courbes algébriques (1750)

Dionys du Séjour (1734-1794) et Goudin (1734
Traité des courbes algébriques (1756)

Goudin seul. Traité des propriétés communes à tles c

Waring (1734-1798) Miscellanea analytica (1
Proprietates geometricarum curvarum (1772)

Halley (1656-1742) Trad. les Coniques d'Apollonius, le De sectione rationis; restitue le De sectione spatii.

Newton: Arithmetica universalis, Principia philosophiae naturalis mathematica. Propriétés des coniques. Rectification des épicycloïdes. Ovales de Descartes.

Mac-Laurin: Traité des fluxions – Figure de la Terre: attraction d'un ellipsoïde de révolution – Problème des forces centrales donnant une trajectoire elliptique.

Simson (1687-1768) Traité des Sections coniques. Traité des Porismes; Section déterminée. Lieux plans d'Apoll. Trad. des Œuvres de Pappus.

Stewart (1717-1785) Qques théorèmes généraux (1746)
Traités de physique et de mathématique (1761.) Distance de la Terre au Soleil (erreur corrigée par Dawson, 1769, & Landen 1771.)
Propositiones geometricae, more veterum demonstratae (1763.)
Théorème sur 4 points, dont 3 en ligne droite:

$$\overline{DA}^2.BC + \overline{DB}^2.AC - \overline{DC}^2.AB = AB.AC.BC.$$

(employé par R. Simson, Th. Simpson, Euler, John Leslie)
(cas particulier d'une relation générale entre 5 points en ligne droite)
Théorèmes arithmétiques sur les polygones réguliers, les points et droites.
Involution sur une transversale au quadrilatère. Description du cercle par l'intersection de 2 droites (coupant une transversale.)

Lambert (1728-1777) Traité de Perspective (1759), Traité des Comètes (1761.)

Cinquième époque

Monge. Géométrie descriptive. Relations récip[…]
entre la géométrie plane et la géométrie de l'espace.
Transmutation des figures à 3 dimensions en figures p[…]
Démonstration par les figures contingentes (la propo[…]
reste valable quand ces figures deviennent imagin[…]
Cette méthode se justifie par la généralité de l'Analyse[…]
Les théorèmes concernant les parties intégrantes d'une f[…]
sont indépendants des parties contingentes pourvu qu'on
ne considère pas les cas particuliers de construction.)
Le principe des relations contingentes se rattache au p[…]
de continuité de Poncelet.
Il vaut mieux définir une figure par ses propriétés e[…]
et permanentes que par ses propriétés contingentes et [acci]
dentelles (ex: axe radical de 2 cercles) M. Gauth[…]
Le principe des relations contingentes justifie l'emp[loi des]
imaginaires en géométrie.
Style de Monge: géométrie sans figures.
Solution de problèmes d'Analyse par la Géométrie[:]
intégration des éq. différentielles représentant des sur[faces]

Carnot: Géométrie de position. Th. des transv[ersales]
(Distinction des relations descriptives et métriques.) [Il]
développa la géométrie métrique comme Monge avait [développé]
la géométrie descriptive. Tous deux continuent De[sargues]
et Pascal. – Traité de la Corrélation des figures de [géométrie]

Cousinery: Géométrie perspective (un seul plan de p[rojection])
Lacroix: Essais sur les plans et surfaces (1795) Géométrie de[…]

Poncelet: Traité des Propriétés projectives des figures.
Principe de continuité; polaires réciproques; homologie

Servois: Géométrie de la règle
Ch. Dupin: ~~la~~ Th. géom. de la courbure des surfaces (par la géométrie pure)
Hachette: Géométrie à 3 dimensions - Géom. descriptive.
Brianchon: Lignes du 2e ordre - Th. des transversales.
Géométrie de la règle [Mascheroni, Géom. du compas 1797.)
[Cardan, Tartaglia et J. B. de Benedictis ont traité des problèmes avec la règle et une seule ouverture de compas.)
4 doctrines principales dans la Géométrie pure moderne.
1° transversales; 2° Transformations (perspectives & projectives);
3° Polaires réciproques; 4° Projections stéréographiques.
- Ajoutons: Th. des tangentes conjuguées, de Ch. Dupin;
Th. des caustiques, de Quételet.
Connexion entre la dualité des figures sphériques et la théorie des polaires réciproques (projection ~~centrale de la sphère sur un plan~~)
- Géométrie de la sphère: Lexell, Fuss (ellipse sphérique)
Schubert (trigonométrie sphérique déduite du th. de Ptolémée.)
Sorlin (dualité des figures sphériques.) Magnus, Lhuilier
Gergonne, Guérsan d'~~Aumont~~ (analogie avec la géom. plane)
Quételet - Steiner, Gudermann (Crelle II, VI.)
- Théorie des surfaces du second degré: Euler - Monge et Hachette, Binet, Ch. Dupin (Les propriétés des coniques rentrent comme cas particuliers dans celles des surfaces du 2e degré.)
Lamé (construire une surf. du 2e d. passant par 9 points donnés)
Question: relation entre 10 points d'une surf. du 2e degré.

Courbes à double courbure du 3e et du 4e degré : Hachette, Poncelet, Quételet.

L'avenir de la Géométrie ~~est dans~~ ses applications a[ux] phénomènes physiques : Poinsot, Rotation des [...] (méthode purement géométrique)

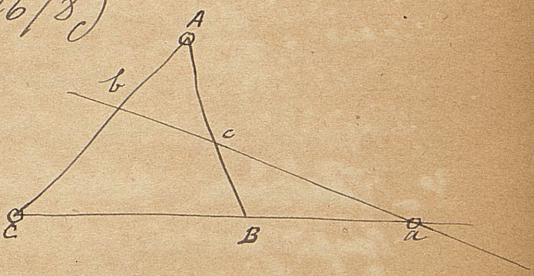
La théorie des polaires réciproques n'est qu'une applic[ation] particulière du principe de dualité. Par ce princip[e on] fait correspondre les points et les droites (ou les p[lans]) de telle sorte que les points qui correspondent à [des] droites issues d'un même point se trouvent sur [une] même droite, qui correspond à ce point. D'où [...] des figures correspondantes. — Coordonnées tangent[ielles] Utilité du principe de dualité en Algèbre.

Principe de homographie : principe général de transform[ation] dont toutes les autres déformations (de figures en figur[es du] même genre) sont des cas particuliers (La majoration [des] ordonnées, par laquelle on transforme par ex. le cer[cle en] ellipse, est une méthode de généralisation, car elle p[ermet] de conclure du cas particulier au cas général). Le principe de homographie a pour but de générali[ser] les constructions, soit les propriétés des figures. Ce principe repose sur la conservation du rapport anhar[monique] de 4 points ou de 4 droites : c'est le type unique de[s] relations transformables par homographie. La [...] correspondance entre une figure et sa transformée cons[iste dans] l'égalité des rapports anharmoniques correspondan[ts]. — 3 applications particulières : figures homologiqu[es] extension des relations angulaires ; géométrie des [...] — Enfin, théorie des figures homographiques général[es] de la similitude et de l'homothétie.

(1) avec le principe des relations métriques.

Chasles.

Note VII. Sur l'ouvrage de Jean Ceva, intitulé : De lineis rectis se invicem secantibus, statica constructio (in 4°, Milan, 1678)



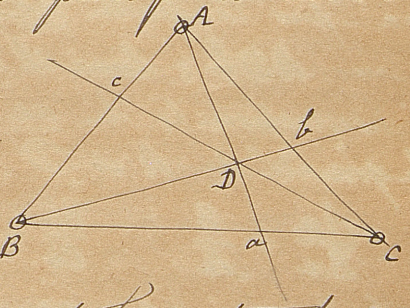
1° – Théorème de Ptolémée :
Plaçons en A, C, a 3 points matériels tels que le centre de gravité de A et C soit en b, et que le centre de gravité de C et a soit en B. Le centre de gravité de A, C, a sera en c. On a :

$$\frac{Ab}{Cb} = \frac{C}{A} \qquad \frac{Ba}{Ca} = \frac{C}{C+a} \qquad \frac{Ac}{Bc} = \frac{C+a}{A}$$

(A, C, a désignant les masses des p. correspondants)

Donc : $Ab.Bc.Ca = Ac.Cb.Ba$

2° – Théorème correspondant (par le principe de dualité)

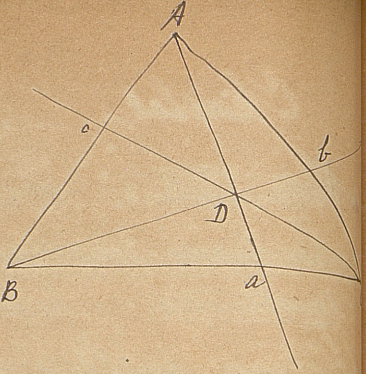


Plaçons en A, B, C 3 points matériels tels que le centre de gravité de A et B soit en c, et le centre de gravité de A et C en b. Le centre de gravité des 3 points sera en D, et conséquemment le centre de gravité de B et C en a. On a donc :

$$\frac{Ba}{Ca} = \frac{C}{B} \qquad \frac{Ac}{Bc} = \frac{B}{A} \qquad \frac{Cb}{Ab} = \frac{A}{C}$$

D'où : $Ab.Bc.Ca = Ac.Cb.Ba$.

Corollaire (même figure)



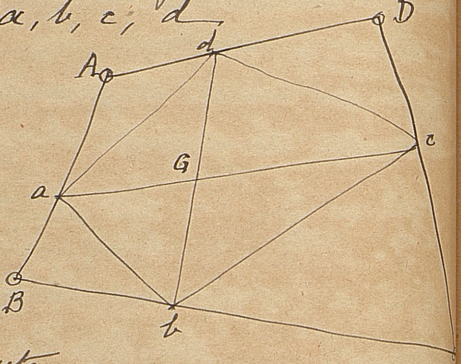
$$\frac{AD}{Da} = \frac{B+C}{A} = \frac{B}{A} + \frac{C}{A}$$

Or : $\frac{B}{A} = \frac{Ac}{Bc}$ $\frac{C}{A} = \frac{Ab}{Cb}$

Donc : $\frac{AD}{Da} = \frac{Ab}{Cb} + \frac{Ac}{Bc}$

propriété générale du quadrilatère $AbDc$.

3° _ Théorème relatif au quadrilatère gauche $ABCD$ coupé par un plan en a, b, c, d.



Plaçons en A, B, C, D des points matériels tels que le centre de gravité de A et B soit en a, celui de B et C en b, celui de C et D en c. Le centre de gravité des 4 points sera sur la droite $\underline{ac}$. D'autre part, il sera dans le plan ADb ; donc il est à leur intersection, c.à.d. à l'intersection G de $\underline{ac}$ et de $\underline{bd}$. Par conséquent, le centre de gravité de A et D se trouve en $\underline{d}$. On a :

$$\frac{Aa}{Ba} = \frac{B}{A} \qquad \frac{Bb}{Cb} = \frac{C}{B} \qquad \frac{Cc}{Dc} = \frac{D}{C} \qquad \frac{Dd}{Ad} = \frac{A}{D}$$

Donc : $Aa . Bb . Cc . Dd = aB . bC . cD . dA$.

Chasles. — Notes.

Note VIII. Construction des spirales. Leur analogie avec les courbes qui portent le même nom dans le système de coordonnées de Descartes.

Toute spirale (c.à.d. toute courbe représentée par une équation en coordonnées polaires) peut être considérée comme la projection de l'intersection d'une surface hélicoïde par une certaine surface de révolution, ces deux surfaces ayant pour axe commun la perpendiculaire au plan de la spirale, menée par son origine.

Soit $z = f(x)$

l'équation en coordonnées cartésiennes de la méridienne de la surface de révolution, Oz étant l'axe de rotation; $z = f(r)$ sera l'équation de la surface de révolution.

D'autre part, soit $z = a\omega$

l'équation de la surface hélicoïde, ω étant l'angle dont tourne la génératrice perpendiculaire à Oz. L'équation, en coordonnées polaires, de la projection de l'intersection des 2 surfaces sur un plan perpendiculaire à l'axe Oz sera: $a\omega = f(r)$

Inversement, à la spirale: $a\omega = f(r)$

correspond la méridienne: $z = f(x)$

On peut concevoir l'intersection des 2 surfaces (dont la spirale est la projection) comme engendrée par un point M qui se déplace d'un mouvement uniforme suivant Oz sur la méridienne, pendant que celle-ci tourne d'un mouvement uniforme autour de l'axe Oz.

A la spirale d'Archimède : $\omega = r$

correspond la courbe méridienne : $z = x$

c.à.d. une droite ; la surface de révolution est un cône

Théorème de Pappus : La spirale d'Archimède est la projection orthogonale de l'intersection de la surface hélic[oïde] par un cône de même axe.

A la spirale hyperbolique : $r\omega = C^{te}$

correspond l'hyperbole équilatère : $xz = C^{te}$

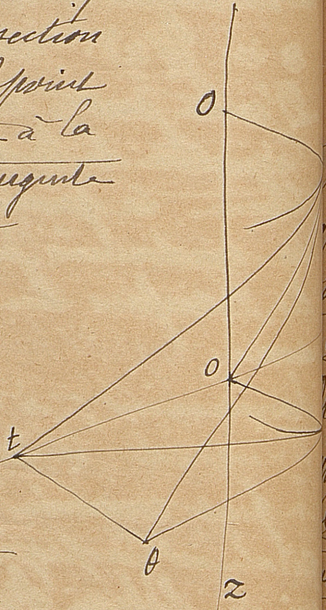
tournant autour d'une de ses asymptotes.

A la spirale logarithmique : $\omega = \log r$

correspond la logarithmique : $z = a \log x$

tournant autour de son asymptote.

— Construction de la tangente aux spirales.



Soit M le point générateur de l'intersection des 2 surfaces ; m sa projection, c.à.d. le point générateur de la spirale. La tangente à la spirale en m est la projection de la tangente à la courbe gauche en M. Celle-ci est l'intersection des plans tangents en M aux 2 surfaces. Or le plan tangent en M à la surface de révolution coupe le plan ~~suivant~~ Ot (on a mené le plan de projection par le p. O où le plan tangent coupe l'axe Oz) Le plan tangent à la surface hélicoïde est OMθ : il coupe le plan de projection suivant θt perpendiculaire à mθ et parallèle à Om. ~~θt~~ Donc : Ot = mθ.

Or: $mt = Mm . tg\, \alpha$ α angle de la tangente $M\theta$
à l'hélice $z = a\omega$, $r = C^{te}$, avec l'axe Oz :
$tg\, \alpha = \frac{r}{a}$ d'où ; $mt = \frac{Mm\, r}{a} = Ot$.
Ot est la sous-tangente à la spirale en m : connaissant Ot,
on peut construire la tangente mt. (car θM est tg à la méridienne)
$Mm = Oo$ est la sous-tangente à la méridienne en M. Ainsi
l'on peut déduire la sous-tangente de la spirale de la
sous-tangente de la méridienne. Posons : $Mm = S$.
Soit On la sous-normale à la spirale : $On = \frac{r^2}{Ot}$:
donc : $On = \frac{ar}{S}$ $Ot = \frac{rS}{a}$.
($r = OM = om$ est l'ordonnée de la méridienne, dont l'abscisse est z.)
Pour la spirale d'Archimède, la méridienne est droite :
$\frac{r}{S} = C^{te}$ Donc : $On = C^{te}$.
La sous-normale de la spirale d'Archimède est constante.
Pour la spirale hyperbolique, la méridienne est une hyperbole
équilatère, où : $Sy = C^{te}$ Donc : $Ot = C^{te}$
La sous-tangente de la spirale hyperbolique est constante.
Dans la logarithmique $S = C^{te}$; donc : $\frac{Ot}{r} = \frac{S}{a} = C^{te}$
Or $\frac{Ot}{r}$ est la tang. trig. de l'angle que fait la tang. à la
spirale avec le rayon vecteur ; donc cet angle est constant.
Dans la spirale logarithmique la tangente fait un angle
constant avec le rayon vecteur.
Les pieds des tangentes sont sur une autre spirale
logarithmique semblable à la première, et par conséquent
égale à la première

Note XII :

La division d'une droite en moyenne et extrême raison serait à trouver, entre 2 points A et B, un 3e point C, tel qu'il ait :

$$\overline{AC}^2 = AB . CB$$

Cette relation peut être regardée comme dérivant d'une a[...] dans laquelle on a supposé qu'un point de la droite a disp[aru] en passant à l'infini. Soit I ce point : le point cherch[é] devra satisfaire, par rapport aux 3 points donnés A, B, I l'équation :

$$\overline{AC}^2 . \overline{BI}^2 = AB . AI . CB . CI$$

qui est symétrique par rapport aux 4 points A, B, C, I de sorte que, quel que soit le point qu'on envoie à l'inf[ini] l'équation résultante exprime toujours la division d'une droite en moyenne et extrême raison.

Chasles.

Note IX : Sur la fonction anharmonique de quatre points ou de quatre droites.

Théorème de Pappus : Quand quatre droites sont issues du même point, toute transversale les rencontre en quatre points dont le rapport anharmonique a toujours la même valeur.

Fonction anharmonique de 4 points en ligne droite :

$$\frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd}.$$

Théorème fondamental : Si d'un point qcque on mène des droites aboutissant à 4 points situés en ligne droite, la fonction anharmonique de ces 4 points aura la même valeur que le rapport anharmonique des 4 droites, càd la fonction obtenue en substituant, dans le rapport anharmonique des 4 points, aux segments qui y entrent, les sinus des angles que font entre elles les droites correspondant à ces points.

La fonction anharmonique de 4 points a donc la propriété projective càd. se conserve par projection.

– 3 formes du rapport anharmonique de 4 points :

$$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd}, \quad \frac{ac}{ab} : \frac{dc}{db}, \quad \frac{ab}{ad} : \frac{cb}{cd}.$$

Si le point d est à l'infini :

$$\frac{ac}{cb}, \quad \frac{ca}{ab}, \quad \frac{ba}{bc}.$$

Si l'un des rapports anharmoniques de 4 points est égal au rapport anharmonique de même forme de 4 autres points, les rapports anharmoniques des 2 autres formes seront aussi égaux entre eux

Relations exprimant l'égalité de 2 fonctions anharmo[niques]

$$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} + \frac{a'b'}{a'd'} : \frac{c'b'}{c'd'} = 1 \qquad \frac{ac}{ab} : \frac{dc}{db} + \frac{a'd'}{a'b'} : \frac{c'd'}{c'b'} = 1 \qquad \frac{ab}{ad} : \frac{cb}{cd} + \frac{a'c'}{a'd'} :$$

En effet, si l'on égale les rapports anharmoniques de même ...
on a :

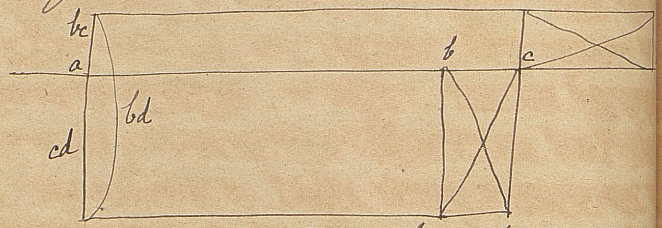
$$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} + \frac{ab}{ad} : \frac{cb}{cd} = 1 \qquad \frac{ac}{ab} : \frac{dc}{db} + \frac{ad}{ab} : \frac{cd}{cb} = 1 \qquad \frac{ab}{ad} : \frac{cb}{cd} + \frac{ac}{ad} :$$

c.à.d. $ac.bd - ab.cd = ad.bc$

$$ac.bd - ad.bc = ab.cd$$

$$ab.cd - ac.bd = -ad.bc$$

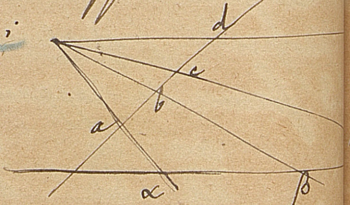
3 relation identique entre 4 points en ligne droite, qu'il a démontrée géométriquement comme suit :



Elle se démontre aussi aisément par l'algèbre.

Autre démonstration des relations entre rapports anharm[oniques]

Projection envoyant d à l'infini :



$$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} = \frac{\alpha\gamma}{\beta\gamma} \qquad \frac{ab}{ad} : \frac{cb}{cd} = \frac{\alpha\beta}{\gamma\beta}$$

La 1e équation devient :

$$\beta\alpha + \alpha\gamma = \beta\gamma$$

relation identique entre 3 points en ligne droite (Möb...

Théorème de Poncelet : Quand 4 droites issues d'un même ... rencontrent un cercle, la 1e en a, a', la 2e en b, b', la 3e ... la 4e en d, d' ; on a la relation :

$$\frac{\sin\frac{ca}{2}}{\sin\frac{cb}{2}} : \frac{\sin\frac{da}{2}}{\sin\frac{db}{2}} = \frac{\sin\frac{c'a'}{2}}{\sin\frac{c'b'}{2}} : \frac{\sin\frac{d'a'}{2}}{\sin\frac{d'b'}{2}}$$

Dans l'espace : Étant donnés 4 plans passant par une même droite, le rapport anharmonique ~~est~~ des 4 points où une transversale les rencontre est égal au rapp. anharmonique des sinus des 4 angles dièdres correspondant aux 4 segments de la transversale, qu'on appelle fonction anharmonique des 4 plans.

8. Quand 4 droites s'appuient chacune sur 3 droites fixes de l'espace le rapport anharmonique des segments qu'elles forment sur l'une de ces 3 droites est égal à celui des segments qu'elles forment sur chacune des 2 autres.

— Pour le démontrer, il suffit de considérer 2 des 3 droites fixes comme des transversales par rapport aux 4 plans déterminés par la 3e et chacune des 4 droites mobiles.

Réciproque : Si 4 droites s'appuient sur 2 droites fixes de l'espace, de manière que les rapports anharmoniques des segments qu'elles font sur ces 2 droites soient égaux toute droite qui s'appuiera sur 3 de ces droites s'appuiera nécessairement sur la quatrième.

Corollaire : Quand une droite mobile s'appuie sur 3 droites fixes, toute droite qui s'appuie sur 3 positions de la dr. mobile s'appuie sur toutes les autres positions de cette droite.

Double génération de l'hyperboloïde à une nappe :

1° La surface engendrée par une droite mobile qui s'appuie sur 3 droites fixes, peut être engendrée, d'une seconde manière par une droite mobile qui s'appuie sur 3 positions de la 1e génératrice. 2° Cette surface est telle que tout plan la coupe suivant une conique.

La 1e partie résulte immédiatement du corollaire précédent.

Pour démontrer la 2e partie, considérons les 4 droites A,
s'appuyant sur les 2 droites L, L' : menons un plan
qcq qui coupe ces 6 droites en $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \lambda'$:
de démontrer que ces 6 points sont sur une conique
cela, il suffit de prouver que les 2 faisceaux $\lambda(\alpha\beta\gamma$
$\lambda'(\alpha\beta\gamma\delta)$ ont même rapport anharmonique. Or le
anharmonique des 4 droites $\lambda\alpha, \lambda\beta, \lambda\gamma, \lambda\delta$ est le même
celui des 4 plans LA, LB, LC, LD, c.à.d. que celui
4 points a', b', c', d' où la droite L' (considérée co
transversal) rencontre les 4 droites $A, B, C,$
De même, le rapport anharmonique des 4 dr. $\lambda'\alpha, \lambda'\beta$
est le même que celui des 4 plans $L'A, L'B, L'C, L$
c.à.d que celui des 4 points a, b, c, d où la droite
rencontre les 4 dr. A, B, C, D. Or les rapports anha
des 4 points a, b, c, d et des 4 p. a', b', c', d' sont
donc les rapports anharmoniques des 4 dr. $\lambda\alpha, \lambda\beta, \lambda\gamma,$
des 4 dr. $\lambda'\alpha, \lambda'\beta, \lambda'\gamma, \lambda'\delta$ sont aussi égaux, c. q.

<u>Corollaire</u> Les droites menées par un point de l'espa
parallèlement aux génératrices ~~de même système~~ de l'h
forment un cône du second degré.

On prouve ce th. en montrant, comme ci-dessus,
toute section plane du cône est une conique.

<u>Corollaire</u> Quatre génératrices du même système de
hyperboloïde à une nappe font, sur une génératrice quel
de l'autre système, quatre segments dont le rapp. anhar
a une valeur constante.

<u>Corollaire</u> Si l'on a un quadrilatère gauche $abb'a'$
qu'on divise ses côtés opposés $\underline{ab}$, $\underline{a'b'}$ de telle sorte qu'on
aux points c, c'

$$\frac{ca}{cb} = \frac{c'a'}{c'b'} \times \text{Const.}$$

la droite $\underline{cc'}$ engendre un hyperboloïde à une nappe
(cf. mém. sur le principe de dualité, page 8.)

Chasles.

Note X : Théorie de l'involution de six points. (1e partie)

Six points en ligne droite, A, A', B, B', C, C' se correspondant 2 à 2, sont dits en involution quand on a :

$$\frac{CA.CA'}{CB.CB'} = \frac{C'A.C'A'}{C'B.C'B'}$$

On a en même temps :

$$\frac{BA.BA'}{BC.BC'} = \frac{B'A.B'A'}{B'C.B'C'} \qquad \frac{AB.AB'}{AC.AC'} = \frac{A'B.A'B'}{A'C.A'C'}$$

A

On a aussi les quatre relations entre 6 segments :

$$B \left\{ \begin{array}{l} AB'.BC'.CA' = AC'.CB'.BA' \\ AB'.BC.C'A' = AC.C'B'.BA' \\ AB.B'C'.CA' = AC'.CB.B'A' \\ AB.B'C.C'A' = AC.C'B.B'A' \end{array} \right\} B$$

De chacune des 7 relations on peut déduire les 6 autres.

Si 2 points conjugués D, D', forment une involution avec les 4 points A, A', B, B' : $\dfrac{AB.AB'}{AD.AD'} = \dfrac{A'B.A'B'}{A'D.A'D'}$

ils forment une involution avec 2 cgues des 3 prem couples :

par ex : $\dfrac{AC.AC'}{AD.AD'} = \dfrac{A'C.A'C'}{A'D.A'D'}$

Si l'on a sur une ligne droite plusieurs couples de points conjugués formant une involution avec 2 premiers couples, 3 couples cgues sont en involution.

Si sur une ligne droite 4 couples de points forment pris 3 à 3, une involution, 4 points pris chacun dans un couple ont le même rapport anharmonique que les 4 autres points.

Involution de 6 points (Desargues)

Si 2 points conjugués C, C' se confondent en un seul point, on a les 4 relations:

$$\frac{AB.AB'}{A'B.A'B'} = \frac{AE^2}{A'E^2} \qquad \frac{BA.BA'}{B'A.B'A'} = \frac{BE^2}{B'E^2}$$

$$\frac{EA.EB}{EA'.EB'} = \frac{AB}{A'B'} \qquad \frac{EA.EB'}{EA'.EB} = \frac{AB'}{A'B}$$

— Si C' est à l'infini, son conjugué C devient le point central O : les 7 relations deviennent :

$$OA.OA' = OB.OB', \quad \frac{BA.BA'}{B'A.B'A'} = \frac{BO}{B'O}, \quad \frac{AB.AB'}{A'B.A'B'} = \frac{AO}{A'O}$$

$$\frac{AB'}{A'B} = \frac{OB'}{OA'}, \quad \frac{AB'}{A'B} = \frac{OA}{OB}, \quad \frac{AB}{A'B} = \frac{OB}{OA'}, \quad \frac{AB}{AB'} = \frac{OA}{OB'}$$

Quand 3 couples de points forment une involution, il y a toujours un point tel, que le produit de ses distances aux 2 points de chaque couple est constant.

Réciproque : Si l'on prend sur une droite 2 points tels que le produit de leurs distances à un p fixe O de cette droite soit égal à une quantité constante, 3 couples de points forment une involution

Dans toute involution de 6 points, il y a un point et 2 points doubles E, déterminés par la condition

(1) $$OA.OA' = OB.OB' = OC.OC' = \overline{OE}^2$$

Ils sont réels si les points conjugués sont du même côté par rapport à O ; imaginaires, s'ils sont de côtés différents.

Soient E, F les 2 points doubles réels : on a

$OE^2 = OF^2 = OA.OA'$ — E et F sont conjugués harmoniques par rapport à A, A'

(1) Il s'ensuit que 3 couples de points conjugués harmoniques par rapport à 2 points fixes E, F, forment une involution

$OE^2 - OF^2 = OB.OB'$

E et F sont ~~donc~~ aussi conjugués harmoniques par rapport à B, B'.
Les points doubles sont donc conjugués harmoniques par rapport à un couple quelconque de l'involution.

Chacun des rapports : $\dfrac{EA.EA'}{EB.EB'}$, $\dfrac{FA.FA'}{FB.FB'}$

est un maximum ou un minimum si l'on remplace le point double E ou F par un point qcq M de la droite (Apollonius).

Étant donnés 2 couples de points A, A' et B, B', et leur point central O, un point qcq M de la droite jouit de la propriété suivante (Pappus) :

$$MA.MA' - MB.MB' = (AB + A'B')\,MO.$$

Théorème de Pappus (VII, 130) :
Une transversale qcq coupe les côtés et les diagonales d'un quadrilatère en 6 points qui sont en involution. (équations B) (Les équations A sont dues à Desargues)

Théorème de Desargues :
Un quadrilatère étant inscrit à une conique les 6 points où une transversale qcq rencontre la conique et les 4 côtés du quadrilatère sont en involution. (Sturm)

Théorèmes analogues, qu'on déduit du précédent :
Quand 2 coniques sont circonscrites à un quadrilatère, si une transversale qcq rencontre ces coniques en 4 points et 2 côtés opposés du quadrilatère en 2 autres points, ces 6 points sont en involution.
Quand 3 coniques sont circonscrites au même quadrilatère, une transversale qcq les coupe en 6 points qui sont en involution.

Propositions inverses (en vertu du principe de dualité
Les droites menées d'un même point par 6 points en involution forment un faisceau en involution, c... que les mêmes relations qui existent entre les segmen... la transversale ont lieu entre les sinus des angles corresp... — En effet, la relation de involution se réduisant à ... de 2 rapports anharmoniques, et les rapports anharmon... ayant les mêmes valeurs pour les sinus des angles du... que pour les ~~points~~ segments, les relations d'involution se con... quand on passe des points aux droites. — Et récipro... Un faisceau en involution détermine ~~une involution~~ sur une transversale qcque 6 points en involution.
Les 6 tangentes menées d'un même point ~~aux~~ à 3 c... inscrites dans un même quadrilatère forment ~~un~~ ... en involution (Th. inverse du dernier de la page précéde...
Si les 3 coniques se réduisent aux 3 diagonales d... quadrilatère complet, on a comme cas particulier
Corollaire. Les six droites menées d'un même p... aux 6 sommets d'un quadrilatère complet for... un faisceau en involution (Th. inverse de celui de ... Toute transversale rencontrera ces droites en 6 points qu... en involution.

2e partie

Quand 3 droites, issues d'un même point, rencontrent ... circonférence, la 1e en a, a', la 2e en b, b', la 3e en ... on a la relation d'involution (analogue aux relations

$$\frac{\sin\frac{ca}{2}\cdot\sin\frac{ca'}{2}}{\sin\frac{cb}{2}\cdot\sin\frac{cb'}{2}}=\frac{\sin\frac{c'a}{2}\cdot\sin\frac{c'a'}{2}}{\sin\frac{c'b}{2}\cdot\sin\frac{c'b'}{2}}$$

On aura entre les sinus toutes les relations (A) (B) (C) (...

Chasles.

Note X. Sur l'involution de six points: 2e partie.

Six points, conjugués deux à deux, sont en involution lorsque le rapport anharmonique de quatre d'entre eux est égal à celui de leurs conjugués.

Le rapp anharmonique (A, B, C, C') est égal au rapp. anharm (A', B', C', C) si l'on a une des 3 relations:

$$\frac{CA}{CB} : \frac{C'A}{C'B} = \frac{C'A'}{C'B'} : \frac{CA'}{CB'} \quad \text{ou} \quad \frac{CA.CA'}{CB.CB'} = \frac{C'A.C'A'}{C'B.C'B'}$$

$$\frac{CA}{CC'} : \frac{BA}{BC'} = \frac{C'A'}{C'C} : \frac{B'A'}{B'C} \quad \text{ou} \quad CA.A'B'.BC' = C'A'.AB.B'C$$

$$\frac{CB}{CC'} : \frac{AB}{AC'} = \frac{C'B'}{C'C} : \frac{A'B'}{A'C} \quad \text{ou} \quad CB.B'A'.AC' = C'B'.BA.A'C$$

d'où l'on déduit les 7 relations d'involution (A) et (B) (v. 1e partie)

Lorsque 6 points sont en involution, le rapport anharmonique de 4 quelconques d'entre eux est égal à celui de leurs conjugués. (dont 3 appartiennent aux 3 couples)

La relation de involution peut s'exprimer de 12 manières par une équation à 3 termes. 4 éq. contiennent AA', 4 autres BB', 4 autres CC': exemple:

$$\frac{AB.AC}{AA'.BC} + \frac{AB'.A'C'}{AA'.B'C'} = 1 \qquad (C)$$

Chacune des 12 équations entraîne les 11 autres.

On a 8 autres équations à 3 termes, de la forme:

$$\frac{AC.AC'}{AB.AB'} + \frac{BC.BC'}{BA.BA'} = 1 \qquad (D)$$

Toutes ces équations (les 12 et les 8) contiennent 7 segments différents chacune

Soient α, β, γ les milieux des segments AA', BB', situés dans l'ordre α, β, γ ; on a la relation :

(E) $$\alpha A^2 . \beta\gamma - \beta B^2 . \alpha\gamma + \gamma C^2 . \alpha\beta = \alpha\beta . \beta\gamma . \gamma\alpha$$

unique en son genre

Si C et C' se confondent en E, la relation devient

$$\alpha A^2 . \beta E - \beta B^2 . \alpha E = \alpha\beta . \beta E . \alpha E.$$

Si de plus B et B' se confondent en F, elle devient

$$\alpha A^2 = \alpha E . \alpha F$$

ce qui signifie que A, A' sont conjugués harmoniques rapport à E, F.

Soit M un point arbitraire de la droite : on a la

(F) $$MA . MA' . \beta\gamma - MB . MB' . \alpha\gamma + MC . MC' . \alpha\beta = 0$$

Démonstration. Si la relation a lieu pour un point de la droite, elle a lieu pour tout point M de la dr. Or elle a lieu pour le point central O de l'involution car, comme $OA . OA' = OB . OB' = OC . OC'$

elle se réduit à : $\beta\gamma - \alpha\gamma + \alpha\beta = 0$ id

Remarque $\beta\gamma = \frac{BC + B'C'}{2}$, $\alpha\gamma = \frac{AC + A'C'}{2}$, $\alpha\beta = \frac{AB}{}$

– Dans le cas où C et C' se confondent en E, B et B' il vient : $MA . MA' . EF - MF^2 . \alpha E + ME^2 . \alpha F = 0$ relation entre 2 points conjugués harmoniques, A, A' et un point quelconque M de leur direction

L'équation (F) est la forme la plus générale de la relation d'involution ; car on en peut déduire toutes les autres identifiant le point M à A, B, C, etc

On en déduit la relation (E) en retranchant l'équation de l'équation générale de Stewart entre 3 points

(1) car on a entre 3 p. quelconques d'une dr. l'éq : $m\alpha . \beta\gamma + m\beta . \gamma\alpha + m\gamma . \alpha\beta$ cf

142

$m\alpha^2.\beta\gamma - m\beta^2.\alpha\gamma + m\gamma^2.\alpha\beta = \alpha\beta.\beta\gamma.\gamma\alpha.$

En remarquant que: $m\alpha^2 - \alpha A^2 = (m\alpha+\alpha A)(m\alpha-\alpha A) = mA.mA'$.
On en déduit la propriété du point central (Pappus) Soit C' à l'infini; C devient le point central O; on a:

$$mA.mA' - mB.mB'.\frac{\alpha\gamma}{\beta\gamma} + mC.\alpha\beta.\frac{mC'}{\beta\gamma} = 0$$

Or: $\frac{\alpha\gamma}{\beta\gamma} = 1$, $\frac{mC'}{\beta\gamma} = 2\frac{mC'}{\beta C+\beta C'} = \frac{2}{\frac{\beta C}{mC'}+\frac{\beta C'}{mC'}} = 2$; donc

$$mA.mA' - mB.mB' + 2\alpha\beta.mO = 0$$ (cf. p. 25, n. X.)

Si B, B' se confondent en E (point double) l'éq. devient:

$$mA.mA' - mE^2 + 2\alpha E.mO = 0. \qquad (H)$$

Si A, A' se confondent en F (2e point double) il vient:

$$mF^2 - mE^2 + 2FE.mO = 0$$

Relation entre 3 pts quelconques m, E, F, et le pt milieu O de E et F.

Démonstration du théorème d'Apollonius: d'après l'éq. (D):

$\frac{AC.AC'}{AB.AB'}$ (A variable) sera un max. ou un min. suivant que $BA.BA'$ sera un min. ou un max. Or, en vertu de (H):

$$BA.BA' = BE^2 - 2\alpha E.BO$$

sera max. ou min., pour $\alpha E = 0$ (A et A' confondus en E.)

Relation de involution avec 2 points arbitraires m, n

Soient α, β, γ les conjugués harmoniques de n par rapport à A, A', à B, B', à C, C':

$$\frac{mA.mA'}{nA.nA'}.n\alpha.\beta\gamma + \frac{mB.mB'}{nB.nB'}.n\beta.\gamma\alpha + \frac{mC.mC'}{nC.nC'}.n\gamma.\alpha\beta = 0$$

Si n est à l'infini, on retrouve la relation (F.)

m est le point central, $mA.mA' = mB.mB' = mC.mC'$: alors:

$$\frac{n\alpha.\beta\gamma}{nA.nA'} + \frac{n\beta.\gamma\alpha}{nB.nB'} + \frac{n\gamma.\alpha\beta}{nC.nC'} = 0$$

(Relation d'involution avec un 7e point arbitraire.

Relations géométriques de involution :

Trois couples de diamètres conjugués d'une conique forment un faisceau en involution

Quand 3 cordes d'une conique passent par un même point, les droites menées d'un p. qcque de la courbe à leurs extrémités sont en involution.

Quand 3 angles circonscrits à une conique ont leurs sommets en ligne droite, leurs côtés rencontrent une tangente qcque à la conique en 6 points qui sont en involution (prop. inverse de la précédente.)

— Par un p. qcque du plan d'une conique on peut mener deux droites rectangulaires telles que le pôle de l'une (par rapport à la conique) soit sur l'autre :

Six droites ainsi menées, par 3 points arbitraires, rencontrent chacun des 2 axes principaux de la courbe en 6 points qui sont en involution.

Le point central de l'involution est le centre de la courbe et les points doubles de l'involution, sur chaque axe, sont les foyers (réels ou imaginaires) de la courbe.

Ainsi toute conique a 4 foyers, 2 réels et 2 imaginaires

(Pour un p. de la cbe les 2 dr. conjuguées sont la tangente et la normale)

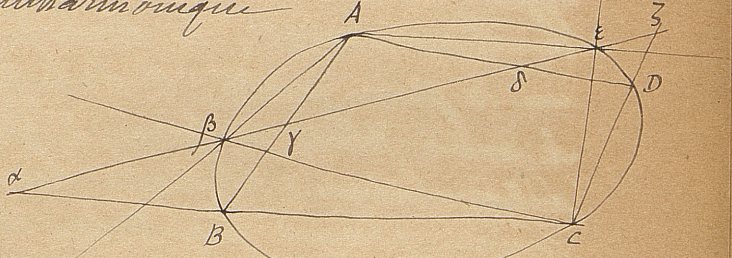
— Quand 3 surfaces courbes qcques ayant un point de contact commun, s'y coupent 2 à 2, si l'on mène en ce p. les tangentes aux 2 branches de chacune des 3 courbes d'intersection, ces 6 droites seront en involution

Quand, par une génératrice d'une surface réglée, on mène 3 plans qcques, chacun d'eux est tangent en un p. et normal en un autre, les 6 points sont en involution

Chasles.

Note XV: Sur la propriété anharmonique des points d'une conique.

Théorème de Desargues sur l'involution de six points:
Quadrilatère inscrit à une conique; joignons 2 sommets opposés aux points où la transversale rencontre la conique; on a en ces 2 sommets 2 faisceaux de 4 droites. La relation d'involution entre les 6 points $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ exprime que le rapport anharmonique des 4 points $(\alpha, \beta, \varepsilon, \zeta)$ où l'un des faisceaux coupe la transversale est égal au rapport anharmonique des 4 points conjugués $(\beta, \gamma, \delta, \varepsilon)$ où l'autre faisceau rencontre la transversale; c.à.d. que les 2 faisceaux ont même rapport anharmonique.



De: $\dfrac{\beta\alpha \cdot \beta\delta}{\beta\gamma \cdot \beta\zeta} = \dfrac{\varepsilon\alpha \cdot \varepsilon\delta}{\varepsilon\gamma \cdot \varepsilon\zeta}$ on tire: $\dfrac{\beta\alpha}{\beta\gamma} : \dfrac{\varepsilon\alpha}{\varepsilon\gamma} = \dfrac{\varepsilon\delta}{\varepsilon\zeta} : \dfrac{\beta\delta}{\beta\zeta}$

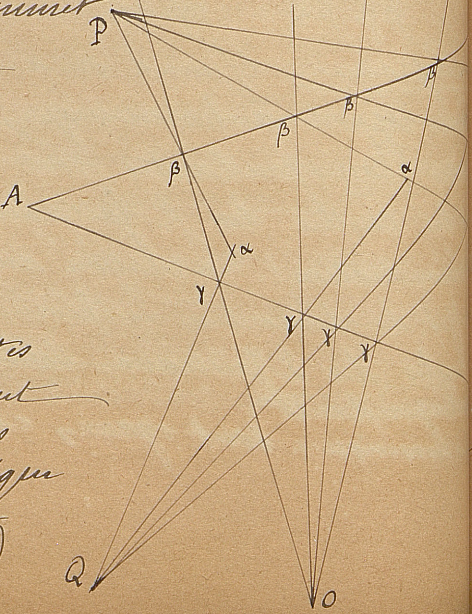
Réciproque. Quand on a 2 faisceaux de 4 droites ayant même rapport anharmonique, les 4 points de rencontre des droites correspondantes sont sur une conique qui passe par les centres des 2 faisceaux.

Démonstration: La relation anharmonique étant projective, il suffit de démontrer le théorème pour le cercle. Or dans le cercle, les angles des 2 faisceaux sont égaux, donc leurs rapports correspondants anharmoniques sont égaux c.q.f.d.

Si l'on fixe les 3 premières droites de chaque faisceau
que l'on fasse tourner les deux quatrièmes droites de f
que les rapports anharmoniques soient constamment
l'intersection de ces 2 droites corresp. engendrera une c
D'où une infinité de modes de génération des coniq
par l'intersection de 2 droites tournant autour de p.

Par exemple : Concevons un angle fixe A et menons d'un
fixe O une transversale mobile ; 4 positions de cette transv
déterminent sur chaque côté de l'angle 4 points dont
rapport anharmonique est égal à celui des 4 points d
sur l'autre côté. Si d'un p. fixe P on mène des d
aux 4 prem. points, et d'un p. fixe Q des droites au
4 autres points, on forme 2 faisceaux ayant même rap
anharmonique ; les droites corresp. se couperont sur
conique passant par P, Q. Donc :

Quand les 3 côtés d'un triangle variable tournent au
de 3 p. fixes (O, P, Q), et que 2 des sommets du triang
parcourent 2 droites fixes, le 3e sommet engendre une co
qui passe par les 2 points fixes autour desquels tourne
les côtés adjacents à ce sommet.



(C'est le théorème de Pascal sur l'hexagramme mystique retrouvé par Mac-Laurin et Braikenridge.)

Le côté $\beta\gamma$ pourrait aussi rouler sur une conique inscrite dans l'angle A ; car 4 tangentes quelconques d'une conique déterminent sur 2 autres tangentes fixes des points dont le rapport anharmonique est le même (propriété inverse de la précédente, en vertu de la dualité.)
v. la note XVI.

(ou sur une conique passant par leurs centres)
Si deux faisceaux sont tels que leurs droites correspondantes se coupent sur une droite fixe, ils seront homographiques; il suffira de les déplacer d'une manière qcque (dans leur plan) autour de leurs centres pour que les points d'intersection des droites correspondantes se trouvent sur une conique passant par les centres des deux faisceaux.

Corollaire. Si deux angles de grandeur qcque, mais constante, tournent autour de leurs sommets de manière que le p. d'inters. de deux de leurs côtés décrive une conique passant par leurs sommets, leurs deux autres côtés se croiseront sur une seconde conique passant aussi par leurs sommets.

Le théorème de Newton (génération organique des coniques) est un cas particulier du précédent, quand la conique directrice est une droite. (les angles correspondants sont égaux)

Si la droite sur laquelle se coupent les 2 faisceaux est à l'infini, les droites correspondantes seront parallèles. D'où ce théorème: Quand on a dans un plan 2 figures semblables, mais non semblablement placées, les droites homologues issues de 2 p. homologues se rencontrent sur une conique passant par ces 2 points.

Autre énoncé du théorème fondamental (~~de Desargues~~ (extrait de la note)):
Quand un hexagone (AβBCDε) est inscrit à une conique si de 2 sommets (A, C) on mène des droites aux 4 autres sommets, on forme 2 faisceaux homographiques (c.à.d. ayant même rapport anharmonique) — Si l'on coupe chacun d'eux par une transversale qcque, le rapport anharmonique des 4 points de inters. de l'un sera égal au rapp. anharm. des 4 points de inters. de l'autre.

Si les deux transversales se confondent avec l'un des côtés de l'hexagone (ou une diagonale), on retrouve le théorème de Desargues sur l'involution de 6 points.

Corollaire : Un quadrilatère étant inscrit à une conique, ...
point qcque de la courbe on abaisse des perpendiculaires ...
côtés, le produit des perpendiculaires abaissées sur 2 côtés ...
sera au produit des deux autres dans un rapport constant ...
(Le problème ad quatuor lineas, de Pappus, a donc pour ...
une conique circonscrite au quadrilatère.)

— Autre forme de la propriété anharmonique :

Soient dans un plan 2 transversales qcques, O, E 2 poin...
qcques sur la 1e, O', E' 2 points fixes qcques sur la se...

Si autour de 2 pôles fixes P, P' pris arbitrairement dan...
on fait tourner 2 droites qui rencontrent les 2 transvers...
respectivement en 2 points A, A' tels qu'on ait constam...

$$(A) \qquad \frac{OA}{EA} + \lambda \frac{O'A'}{E'A'} = \mu \qquad (\lambda \text{ et } \mu \text{ con...}$$

le point de concours des 2 droites mobiles engendrera une ...
qui passera par les 2 pôles P, P'.

En effet, les 2 faisceaux de centres P et P' seront homogr...
or : Deux faisceaux homographiques étant situés dans un ...
plan, les droites homologues se coupent sur une conique ...
par les centres des deux faisceaux.

Cas particulier : Si E, E' sont sur la droite P, P', la ...
engendrée est une droite. Les propriétés de la droite ...
déduisent comme cas particulier de celles des coniques.

En général, pour que l'équation (A) représente une dro...
il suffit que les points ε, ε' où les 2 transversales renco...
la droite PP' satisfassent la relation suivante :

$$\frac{O\varepsilon}{E\varepsilon} + \lambda \frac{O'\varepsilon'}{E'\varepsilon'} = \mu$$

Chasles. – Note XVI :

Sur la propriété anharmonique des tangentes d'une conique

Quand deux droites, situées dans un même plan, portent 2 systèmes de points ayant même rapport anharmonique ~~homographiques~~, les droites qui joignent les points de l'une aux points correspondants de l'autre sont tangentes à une conique tangente aux 2 droites données.

– Démonstration : La relation homographique étant projective, il suffit de démontrer le th. pour le cercle. Or si un angle est circonscrit à un cercle, et qu'on mène 4 tangentes qcques à ce cercle, et terminées à leur rencontre avec les 2 côtés de l'angle, ces tangentes seront vues du centre sous des angles égaux ; donc les segments correspondants déterminés par leurs intersections sur les 2 côtés de l'angle seront vus du centre sous des angles égaux ; donc le rapport anharmonique des 4 points d'intersection du 1er côté est égal au rapp. anharm. des 4 points homologues du 2e côté, c. q. f. d.

Dualité : A l'hexagone inscrit de Pascal (hexagramme mystique) correspond l'hexagone circonscrit de Brianchon. Au théorème de Desargues correspond un théorème de Sturm : Quand un quadrilatère est circonscrit à une conique, les droites menées d'un point qcque à ses 4 sommets et les 2 tangentes menées du même point à la courbe forment un faisceau en involution.

Au théorème ad quatuor lineas (v. note XV, p. 4) correspond celui-ci : Étant donné un quadrilatère circonscrit à une conique et une tangente qcque à la courbe, le produit des distances de cette tangente à 2 sommets opposés du quadrilatère est dans un rapport constant avec le produit de ses distances aux 2 autres sommets.

(Cf. Poncelet, Théorie des polaires réciproques)

— Autre forme de la propriété anharmonique.

Soient dans un plan 2 transversales qcques, O, E 2 p fixes qcques sur la 1re, O', E' 2 points fixes qcques sur la Si deux points variables A, A' parcourent respectivement ces 2 droites, de manière qu'on ait constamment

$$\frac{OA}{EA} + \lambda \frac{O'A'}{E'A'} = \mu \qquad (\lambda, \mu \text{ constantes})$$

la droite AA' touchera constamment la même co qui sera tangente aux 2 transversales fixes.

— Si, S étant le point de concours des 2 transversales

$$\frac{OS}{ES} + \lambda \frac{O'S}{E'S} = \mu$$

la conique se réduit à un point, autour duquel tourne la Cela a lieu quand E, E' coïncident avec S : l'équa

$$\frac{OA}{SA} + \lambda \frac{O'A'}{SA'} = \mu \qquad \text{représente un p}$$

Énoncé général : Quand 2 droites, dans un plan, so divisées homographiquement, les droites qui joignent points de la première aux points homologues de la se enveloppent une conique tangente aux 2 droites do

Quand les 2 droites ne sont pas dans un même plan, les d qui joignent leurs points homologues forment un hyperb (cf. note IX.)

En remplaçant les 2 transversales par une circonférence, on o ce théorème : Étant donnés 4 points fixes qcques O, E, O', une circonférence, si l'on prend sur cette circ. 2 p. variables tels qu'on ait :

$$\frac{\sin\frac{AO}{2}}{\sin\frac{AE}{2}} + \lambda \frac{\sin\frac{A'O'}{2}}{\sin\frac{A'E'}{2}} = \mu$$

la corde AA' enveloppera une conique qui aura un double avec le cercle, et qui touchera la droite E E'.

Le système de 2 droites dans un plan offre (ainsi) une foule de propriétés analogues à celles du cercle et des autres coniques.

Si l'on prend pour E_0, E_0' les points diamétralement opposés à O, O', la relation précédente devient :

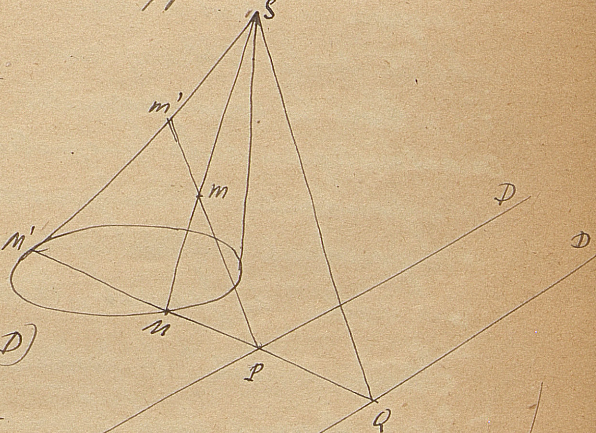
$$\tang \frac{AO}{2} + \lambda . \tang \frac{A'O'}{2} = \mu$$

Corollaire : Étant mené le cercle osculateur en un p. A de une conique, toute tangente à la courbe le rencontre en 2 points tels, que la différence des cotangentes des demi-arcs compris entre ces 2 points et le point A est constante.

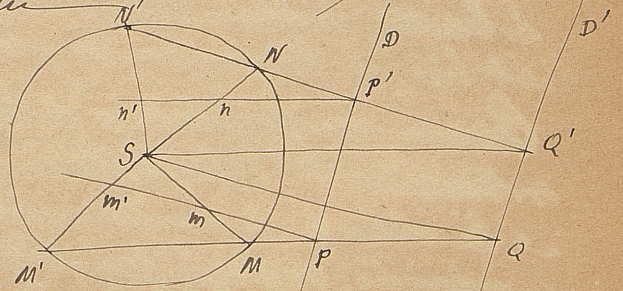
Chasles, troisième époque §§ 30-34, et note XVIII.

Méthode de transformation du cercle en conique (Le Poivre)

Soit un cône à base circulaire, coupé par un plan P.
Pour construire la section conique sans mener ce plan, prenons la droite D suivant laquelle ce plan coupe le plan de la base, et la droite D' suivant laquelle un plan mené par le sommet S du cône parallèlement à P coupe le plan de base. Soit M un p[oin]t q[uel]conque du cercle; on mène une transversale q[uel]conque par M dans le plan de base; elle rencontre D en P et D' en Q; on joint SQ, SM, on mène par P une parallèle à QS; le point m où elle rencontre SM appartient à la section conique cherchée.

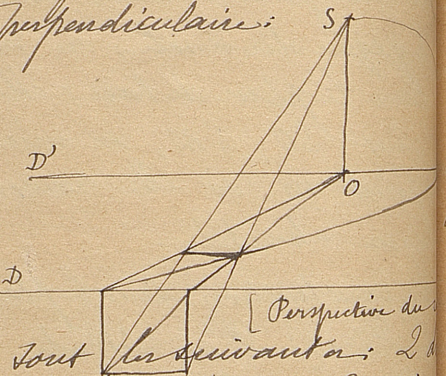


Même construction dans le plan (La Hire) D'où méthode générale de transformation des figures au moyen d'un pôle S, d'une formatrice D et d'une directrice D' (parallèle à D)
Par exemple, si l'on prend pour pôle le centre du cercle, on obtient comme transformée une conique ayant ce pôle pour foyer.



Propriétés caractéristiques:
2 points correspondants sont en ligne droite avec le pôle S;
2 droites correspondantes se coupent sur la formatrice D;
2 droites parallèles correspondent à 2 droites qui se coupent sur la directrice D'. Cette directrice correspond ~~ux~~ aux points à l'infini de la figure ~~donnée~~ transformée.
à la figure ~~transformée~~ donnée (En effet, si Q et Q' coïncident, mm' et nn' sont parallèles.)

Les figures transformées par la méthode de La Hire et Le
sont les figures homologiques de Poncelet: le pôle S est le
de homologie, la formatrice D est l'axe d'homologie.
Cette méthode de transformation revient à la perspective
de prendre la formatrice pour ligne de terre, la directrice
ligne d'horizon, le pied de la perp. abaissée du pôle sur
directrice pour point de vue, et le point de distance à u
égale à la longueur de cette perpendiculaire:



Dans la méthode de perspective
de Stevin, S'Gravesande,
Taylor et du P. Jacquier,
on emploie le point de vue
rabattu sur le tableau, càd
S. Alors les deux propriétés [Perspective du
caractéristiques de la perspective sont les suivantes: 2 d
correspondantes se coupent sur la ligne de terre; 2 points
correspondants sont en ligne droite avec le point de vue rabat
(Voir traités de Jeaurat, Ozanam, Lambert (1773), M. Ch
[Stevin a traité le problème inverse de la perspective, sa
Étant données deux figures planes dont l'une est la persp
de l'autre, les placer dans l'espace de manière que la persp
ait lieu, et déterminer la position de l'œil.]
Comme cas particuliers de la méthode générale de transf
on trouve: 1° l'homothétie (formatrice et directrice à
2° la méthode de transformation du cercle en ellipse par m
des ordonnées, employée par Albert Durer, Stevin, Grégoire de
(le pôle S est à l'infini)

Chasles — Note XX.

Sur la génération des courbes du 3e degré par les 5 paraboles divergentes, et par les 5 courbes à centre.

Théorème: Si autour d'un point d'inflexion d'une courbe du 3e degré, on fait tourner une transversale et qu'aux 2 points où elle coupe la courbe on mène des tangentes leur point de concours engendrera une droite.

Cette droite rencontrera ~~toute~~ chaque transversale en un point qui ~~sera le conjugué~~ harmonique du point d'inflexion par rapport aux deux points d'intersection de la courbe et de la transversale.

Corollaires: Les droites qui joignent deux à deux les points où 2 transversales rencontrent la courbe se coupent sur la susdite droite.

Cette droite passe par les points de contact des 3 tangentes menées à la courbe par le point d'inflexion. On l'appellera la polaire du point d'inflexion.

Toute courbe du 3e degré ayant 1 ou 3 points d'inflexion, si l'on projette cette courbe de manière qu'un de ses points d'inflexion passe à l'infini, sa polaire deviendra un diamètre de la courbe.

Si l'on envoie à l'infini, par perspective, non seulement le point d'inflexion, mais encore la tangente en ce point, la courbe aura un diamètre et n'aura pas d'asymptote: elle sera parabolique.

Ainsi une courbe qcq du 3e degré peut se transformer par perspective en une des 5 paraboles divergentes, et inversement, peut être obtenue par la perspective d'une parabole.

(ou par l'ombre (Newton)

Si au contraire on projette à l'infini la polaire du d'inflexion, ce point devient le centre de la courbe.

Ainsi une courbe qcque du 3e degré peut se trans par perspective en une ~~courb~~ des 5 courbes à centre, et seulement, peut être obtenue comme perspective d'une

En résumé, les courbes du 3e degré ne peuvent donner qu'à 5 espèces de cônes ; en coupant ces cônes d' certaine manière, on forme les 5 paraboles divergent en les coupant d'une autre manière, on forme les 5 c à centre.

Chasles. — Note XXI.

Sur les ovales de Descartes, ou lignes aplanétiques.

Ces courbes sont les caustiques secondaires (développantes des caustiques de Tschirnhausen) produites par la réflexion ou la réfraction dans un cercle éclairé par un point lumineux (Quételet, Sturm.) — Théorème de Quételet :

Deux cercles fixes étant donnés dans un plan, si le centre d'un 3e cercle mobile et de grandeur variable se meut sur le 1er cercle, et que son rayon soit proportionnel à la distance de son centre à la circonférence du 2e cercle, ce cercle mobile enveloppera une courbe du 4e degré, qui sera l'ensemble de 2 ovales de Descartes conjugués.

Génération géométrique des lignes aplanétiques :

Projection stéréographique de l'intersection d'une sphère et d'un cône droit, l'œil étant placé à l'extrémité du diamètre de la sphère parallèle à l'axe du cône.

Soient 2 cônes droits à axes parallèles ; on projette leur intersection sur un plan perpendiculaire à leurs axes.

— Étant donnés 2 cercles dans un plan, si autour d'un point fixe, pris sur la ligne des centres, on fait tourner une transversale coupant chaque cercle en 2 points, les rayons menés des centres respectifs à ces 4 points se couperont en 4 autres points dont le lieu géométrique sera une ligne aplanétique complète ayant pour foyers les 2 centres. (Chaque point du lieu est tel que le rapport de ses distances aux 2 cercles est constant, en vertu du th. des transversales.)

Cette construction donne immédiatement les tangentes de la courbe, car la tangente à la cbe en un point et les tangentes aux 2 cercles aux points correspondants concourent en un même point.

Soit un cercle et un point fixe dans son plan. Si par
ou mène un rayon vecteur à la circonférence, et une d
qui fait avec un axe fixe un angle double de celui que
le rayon vecteur avec le même axe, et qu'on porte sur cette
droite, à partir du point fixe, un segment proportionn
au carré du rayon vecteur ; l'extrémité de ce segment
pour lieu une ligne aplanétique composée de 2 ovales
et ayant pour foyer le point fixe.
Si au lieu d'un cercle, l'extrémité du rayon vecteur p
une ligne droite, on obtient une parabole ayant son foyer au

Les lignes aplanétiques ont toujours trois foyers, dont
quelconques peuvent servir à leur description.
Quand 2 foyers se confondent, la courbe a un
elle devient le Limaçon de Pascal (avec ses 2 foy
Quand 1 foyer est à l'infini, la courbe devient
conique, et conserve ses 2 autres foyers.
Les lignes aplanétiques ont 2 points imaginaires com
à l'infini. (caractéristique de ces courbes)

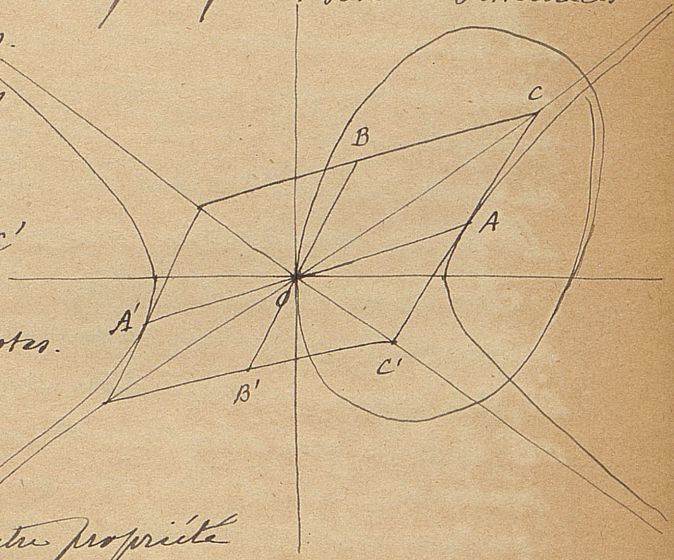
Chasles. — Note XXV.

Application du principe des relations contingentes à la question de déterminer, en grandeur et en direction, les trois axes principaux d'un ellipsoïde dont trois diamètres conjugués sont donnés.

Problème (en Géométrie plane). Étant donnés 2 diamètres conjugués d'une ellipse construire les axes principaux de cette courbe.

Résolvons d'abord le même problème pour l'hyperbole; dans ce cas la solution est très simple: les asymptotes de l'hyperbole sont les diagonales du parallélogramme des diamètres conjugués, et les axes principaux sont les bissectrices des angles des asymptotes.

Soient AA', BB' les diamètres conjugués donnés: par A on mène une parallèle à BB', sur laquelle on porte AC, AC' égaux à OB, OB'; on joint OC, OC', ce sont les 2 asymptotes.



Pour transporter cette solution au cas de l'ellipse il faut remplacer la considération des asymptotes par une autre propriété qui subsiste dans le cas de l'ellipse.

Or si C et C' sont les foyers d'une ellipse passant par le centre O de l'hyperbole, cette ellipse sera tangente à l'axe transverse. Mais cette conique auxiliaire a pour axes principaux la tangente et la normale à l'hyperbole au point A, et de plus AC = OB. Elle est donc complètement déterminée, et il suffit de lui mener

la tangente et la normale en O pour avoir les axes de l'hyp.

Remarque. L'excentricité AC portée sur la tangente est réelle égale à b; mais l'excentricité portée sur la normale est imag. et égale à bi, c.à.d. à ~~l'axe transverse~~ i demi-diam. conjugué de l'hyperbole.

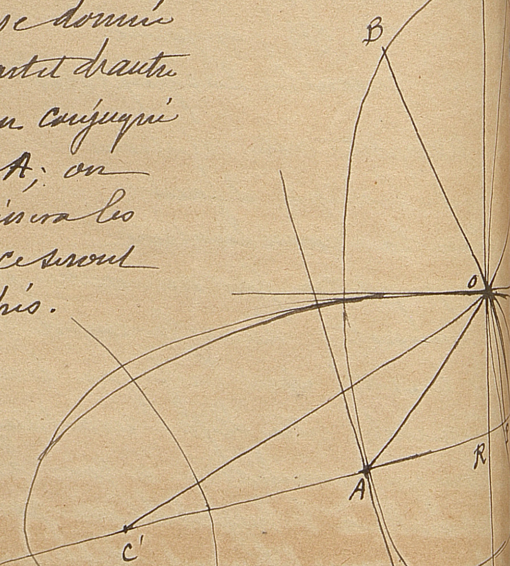
Si l'on regarde la tangente et la normale en un p^t A d'une comme les axes principaux d'une 2^e conique qui passerait centre de la 1^e, et dont l'excentricité, suivant la normale égale au diamètre conjugué de celui qui aboutit au point cette 2^e conique aura pour tangente et pour normale les deux axes principaux de la 1^e.

Ce théorème est vrai aussi bien pour l'ellipse que pour l'hyp. en vertu du principe des relations contingentes.

Appliquons-le à l'ellipse: dans ce cas, l'excentricité sur la normale sera réelle (comme le diamètre conjugué) donc la conique auxiliaire aura ses 2 foyers (réels) sur la normale à la 1^e en A. Les rayons vecteurs ~~issus~~ menés de ces au centre de la 1^e font des angles égaux avec les axes.

D'où la construction suivante:

Sur la normale à l'ellipse donnée au point A on portera de part et d'autre AC, AC' égaux au demi-diam. conjugué OB de celui qui aboutit en A; on joindra OC, OC' et l'on mènera les bissectrices de leurs angles: ce seront les axes principaux cherchés.



Remarque. La conique auxiliaire peut être aussi bien une hyperbole qu'une ellipse, car 2 coniques étant homofocales ~~ayant mêmes axes~~ ~~ayant même~~ ~~excentricité~~ | ~~pour l'hyperbole~~ $\cancel{2a = OC' - OC}$
~~pour l'ellipse~~ $\cancel{2a = OC + OC'}$.
| donc orthogonales.

Pour déterminer les longueurs des axes principaux cherchés, on peut employer le théorème suivant :

Le produit des segments fait sur une normale à une conique par le diamètre qui lui est perpendiculaire et l'un des axes est égal au carré de l'autre demi-axe.

Par exemple, sur la normale à la 1e conique au point A, on a

$$AP \cdot AQ = \overline{OM}^2.$$

D'autre part on sait que si ~~leur mène~~ d'un point (O) d'une conique on mène la tangente et la perpendiculaire à un des axes, le produit des segments déterminés sur cet axe par ces 2 droites et par le centre est égal au carré de ce demi axe.

Ainsi, dans la 2e conique, on a : $AP \cdot AQ = \overline{AN}^2$

Donc : $AN = OM$.

Ainsi l'axe principal de la 2e conique, dirigé suivant la normale à la 1e, est égal à l'axe principal de la 1e conique qui est normal à la 2e.

Or ce grand axe (puisqu'il porte les 2 foyers réels) est égal à la somme ou à la différence des 2 rayons vecteurs (suivant que la 2e conique est une ellipse ou une hyperbole). D'où la construction :

Par l'extrémité A d'un des diamètres conjugués donnés on mènera une perp au 2e diamètre ; on portera sur cette dr. à partir du p. A, 2 segments égaux à ce second demi diamètre ; AC, AC' ; on joindra OC, OC' ; on mènera les bissectrices des angles de OC, OC' ; ces bissectrices seront en direction les deux axes principaux de l'ellipse donnée. En grandeur, le grand axe sera égal à la somme de OC et OC', et le petit axe à leur différence.

En effet, le produit AP.AR est égal à la fois au carré du petit axe de l'ellipse donnée et au carré de l'axe transverse de l'hyperbole de centre A et de foyers C, C' passant par O.

<u>Problème</u> : Étant donnés 3 diamètres conjugués d'un ell
déterminer, en grandeur et en direction, les 3 axes princip

Considérons un hyperboloïde à une nappe et son cône asym
Le plan tangent à l'hyperboloïde en M coupe le cône suiva
hyperbole Σ, dont les diamètres ~~sont~~ ont leurs carrés égaux et de signe co
aux carrés des diamètres parallèles de l'hyperboloïde (cf note
Prenons l'hyperbole Σ pour conique excentrique d'une q
passant par le centre de l'hyperboloïde : cette quadrique
normale à l'un des axes principaux du cône, c.à.d de l'hyper
boloïde. D'autre part, elle aura pour axes la normale en M
l'hyperboloïde, et les axes de l'hyperbole Σ, qui sont les tan
aux lignes de courbure de l'hyperboloïde en M. Donc
faisant abstraction du cône asymptote et en étendant le théo
à toutes les quadriques à centre, par le <u>principe des relat</u>
<u>contingentes</u>) :

Si l'on regarde la normale en un point M d'une quadrique
tangentes aux 2 lignes de courbure en ce point comme les
d'une seconde ~~quadrique~~ passant par le centre de la premièr
normale à un de ses axes principaux, la conique excentriq
de cette seconde quadrique située dans le plan tangent à la
aura les carrés de ses diamètres égaux et de signe contraire aux
des diamètres parallèles de la quadrique donnée.

Appliquons ce théorème à l'ellipsoïde : la conique excentriq
sera alors <u>imaginaire</u>, mais servira à construire les 2 co
excentriques réelles.

Soient b et c les 2 demi-axes (OB, OC) $(b > c)$ de la section faite
l'ellipsoïde par un plan diamétral parallèle au plan tangent
la conique excentrique située dans ~~ce~~ donné plan aura pour carrés de
demi-axes $-b^2, -c^2$ $(-c^2 > -b^2)$. Les 2 foyers réels seront
parallèles à OB, OC l'axe f

Sur la normale à l'ellipsoïde en M on portera à partir de M les segments b et c; dans le plan mené par la normale et une parallèle à OC, on construira l'ellipse ayant pour grand axe le segment b, et pour excentricité le segment c; dans le plan mené par la normale et une parallèle à OB, on construira l'hyperbole ayant pour demi axe transverse le segment c et pour excentricité le segment b. Cette ellipse et cette hyperbole seront les 2 coniques excentriques réelles de la seconde quadrique. — Les deux cônes qui ont pour sommet le centre de l'ellipsoïde et pour bases respectives ces 2 coniques excentriques auront pour axe principal commun la normale en O à la quadrique seconde c.à.d. un des axes principaux de l'ellipsoïde. Et comme il y a 3 quadriques différentes ayant les mêmes coniques excentriques et passant par O, les 2 cônes auront pour axes conjugués ~~principaux~~ communs les 3 normales en O respectivement aux 3 quadriques homofocales, c.à.d. les 3 axes principaux de l'ellipsoïde. D'où la construction suivante : Ces 2 cônes se coupent suivant 4 arêtes, qui sont 2 à 2 dans 6 plans; ces 6 plans se coupent 2 à 2 suivant 3 autres droites : ces 3 droites seront les axes principaux de l'ellipsoïde.

Pour appliquer ces constructions au problème, il suffit de prendre pour M l'extrémité A d'un des 3 diamètres conjugués, et pour OB, OC les 2 autres diamètres conjugués donnés.

— Pour déterminer les longueurs des 3 axes de l'ellipsoïde on a ce théorème : La normale en un point M d'une quadrique rencontre le plan diamétral qui lui est perpendiculaire, et l'un des plans principaux P, en 2 points dont le produit des distances au point M est égal au carré du demi-axe normal au plan principal P.

Théorème : Le plan tangent en un point d'une quadrique [illegible]
mené par ce point perpendiculairement à un des axes fou[rnit sur]
cet axe, à partir du centre, 2 segments dont le produit est [égal]
au carré de ce demi-axe. D'où le théorème

Quand 2 quadriques sont telles que chacune d'elles ait son [centre]
sur l'autre, et ses 3 axes principaux dirigés suivant la no[rmale et]
les 2 tangentes aux lignes de courbure de cette autre, l'ax[e de]
la 1e qui est normal à la 2e est égal à l'axe de la 2e [qui]
est normal à la 1e.

Corollaire : Si l'on regarde la normale et les 2 tangentes a[ux]
lignes de courbure en un point d'une quadrique comm[e]
axes de 3 quadriques passant par le centre de la proposée
tangentes respectivement à ses 3 plans principaux, les [axes]
de ces 3 quadriques qui sont normaux à la proposée sont [égaux]
respectivement aux 3 axes de la quadrique donnée.

Autre méthode pour résoudre le même problème :
Par l'extrémité M d'un des 3 diamètres conjugués donnés, [menons]
2 droites égales et parallèles aux 2 autres diamètres conjug[ués]
et traçons l'ellipse qui a pour axes ces 2 droites. Le cô[ne]
pour base cette ellipse et pour sommet le centre de l'ellip[soïde]
coupe cette surface suivant une ellipse homothétique à la p[remière],
le rapport d'homothétie étant $\sqrt{3}$. – Cette seconde ellip[se]
jouit de cette propriété, que si l'on prend sur elle 3 poin[ts]
tels que le centre de leurs moyennes distances soit le centre [de]
cette ellipse, les 3 dr. OA', OB', OC' seront 3 diamètres conj[ugués]
de l'ellipsoïde (Le centre M' de cette ellipse est homothétique du p[oint M]
par rapport au centre O, et $OM = OM' \cdot \sqrt{3}$.)

D'où la solution suivante :

Étant donnés les 3 diamètres conjugués OA, OB, OC d'un ellipsoïde on construira l'ellipse qui passe par A, B, C et a pour centre le centre des moyennes distances de ces 3 points ; on déterminera les 2 axes principaux, soient b et c, on mènera par son centre une normale à son plan et on exécutera sur cette ellipse la même construction que sur l'ellipse imaginaire prise pour conique excentrique c à d. que l'on construira 2 une ellipse et une hyperbole dans 2 plans rectangulaires entre eux et au plan de l'ellipse ABC : les 2 cônes qui ont pour sommet le centre O et pour bases respectives cette ellipse et cette hyperbole auront mêmes axes que l'ellipsoïde : et les 3 quadriques qui ont pour coniques excentriques cette ellipse et cette hyperbole, et qui passent par le centre O auront leurs axes majeurs égaux respectivement aux 3 axes de l'ellipsoïde qui leur seront normaux, divisés par $\sqrt{3}$ (rapp. de ~~homothétie~~)

Corollaire. Quand 3 diamètres conjugués d'un ellipsoïde doivent aboutir à 3 points donnés, et qu'un des 3 axes de l'ellipsoïde doit avoir une longueur donnée, le centre de cet ellipsoïde est indéterminé, et a pour lieu une quadrique dont le centre est le centre des moyennes distances des 3 points donnés.

Si l'on donne la ~~lon~~ longueur de 2 des 3 axes de l'ellipsoïde son centre a pour lieu l'intersection de 2 quadriques homofocales ayant pour centre le centre des moy. dist. des 3 points donnés.

Si l'on donne les longueurs des 3 axes de l'ellipsoïde, on a 8 solutions : les centres des 8 ellipsoïdes sont les points communs à 3 quadriques homofocales.

— Quand 3 diamètres conjugués d'un ellipsoïde doivent aboutir à 3 points donnés, quel que soit le centre de cet ellipsoïde, ses 3 axes sont les axes principaux communs à 2 cônes ayant ce centre pour sommet, et pour bases 2 coniques fixes ne dépendant que des 3 points donnés.

Ces 2 coniques (qui sont dans la position réciproque de co
excentriques) sont telles que tout cône ayant l'une pou
et pour sommet un point de l'autre est de révolution
suite, ~~son~~ l'ellipsoïde qui aurait son centre au sommet
cône serait aussi de révolution ; donc :

Si l'on demande un ellipsoïde de révolution dont
diamètres conjugués aboutissent à 3 points donnés, le
de son centre sera composé d'une ellipse et d'une hyp
situés dans 2 plans rectangulaires (et perp. au plan des 3 p
et dont chacun a pour foyers les sommets et pour so
les foyers de l'autre.

Chasles — Note ~~XXVI~~.

Sur les imaginaires en géométrie.

«... On ne peut regarder l'expression d'imaginaire que comme indiquant seulement un état d'une figure dans lequel certaines parties, qui seraient réelles dans un autre état de la figure, ont cessé d'exister.... Ce sont donc les relations et propriétés que nous avons appelées contingentes qui donnent la clef des imaginaires en géométrie.»

On peut raisonner sur les imaginaires d'une figure pour découvrir des relations entre parties les parties réelles; mais il ne faut jamais considérer comme réelles ces parties imaginaires, ce qui reviendrait à confondre l'état de la figure où elles sont réelles avec l'état où elles sont imaginaires.

«Ainsi, dans chaque système de diamètres conjugués de l'hyperbole, les directions des 2 diamètres sont réelles; mais la longueur de l'un d'eux est imaginaire: son carré seul est réel. Les propriétés générales de l'ellipse où n'entrent que les carrés des diamètres conjugués s'appliqueront à l'hyperbole comme à l'ellipse; mais celles de ces propriétés où ces longueurs figurent au premier degré n'auront plus d'application dans l'hyperbole, parceque si l'on voulait construire l'axe imaginaire de l'hyperbole en le supposant réel, on commettrait une erreur....»

Considérons par ex. le cercle décrit sur l'axe transverse d'une hyperbole équilatère comme diamètre. Une corde du cercle perp. à cet axe sera réelle si son pied est à l'intérieur, imaginaire s'il est à l'extérieur du cercle. Si on la construit en la supposant réelle, on obtient un point de l'hyperbole équilatère.

(Cf. Lambert. Trigonométrie hyperbolique analogue à la circulaire. donnant l'interprétation des solutions imaginaires de celle-ci.)

Chasles. — Note XXVII :

Sur l'origine de la théorie des polaires réciproques, et celle des mots pôle et polaire

Quand le sommet d'un cône circonscrit à une quadr[ique] ~~décrit~~ parcourt un plan, le plan de la courbe de contact passe [toujours] par un même point ; et quand le sommet du cône d[écrit] une droite, le plan de contact passe toujours par une même [droite] (Monge, Géométrie descriptive.)

Quand le sommet du cône parcourt une quadrique, [le] plan de contact enveloppe une autre quadrique (... et Brianchon, Journal de l'Éc. Polyt. 1806.)

Hexagone de Brianchon, déduit de celui de Pascal pa[r] le principe de dualité.

De même, le problème : circonscrire à une conique [un] polygone dont les sommets soient sur les droites don[nées] se ramène à celui-ci : inscrire à une conique un pol[ygone] dont les côtés passent par des points donnés (Encontre [et] Stainville, ap. Ann. de Math. t. I, pp. 122 et 190.)

Le terme de pôle est dû à Servois ; celui de polaire à Ge[rgonne] (Ann. de Math. I, 337 ; III, 297.)

Pour les problèmes sus-énoncés, traités par Castillon et La[grange] (Mém. de l'Acad de Berlin, 1776) par Euler, Fuss et Le[xell] (Mém. de l'Acad de Petersbourg, 1780) par Giordano di Ot[tajano] et Malfatti (Mem. della Società italiana, t. IV.) par Lhu[ilier] (Mém. Berlin, 1796) généralisé par Brianchon (Journal Éc. P[olyt.]) voir Gergonne (Ann. de Math. t. I, p. 337-342) — Poncelet, Traité des Propriétés projectives, p. 352. (no[te] de Po[ncelet]...)

Chasles — Note XXVIII :

Généralisation de la théorie des projections stéréographiques.

– Construire une quadrique tangente à 4 autres –

Si l'on fait la perspective d'une quadrique d'un point qcq sur un plan qcq, 1° les projections des courbes planes tracées sur la surface seront des coniques ayant un double contact (réel ou imaginaire) avec une conique unique qui sera la perspective du contour apparent de la surface; 2° le pôle de la corde de contact de chaque conique avec cette conique unique sera la projection du sommet du cône circonscrit à la quadrique suivant la courbe plane dont la 1e conique est la projection; 3° les projections de 2 droites polaires réciproques par rapport à la quadrique sont telles que chacune passe par le pôle de l'autre, pris par rapport à la conique unique.

De ce théorème on déduit une foule de propriétés d'un système de coniques inscrites à une conique unique (Poncelet, Tr. des Pr. pr.)

La théorie analogue dans l'espace est celle d'un système de quadriques inscrites à une même quadrique (réelle ou imaginaire)

Deux surfaces sont inscrites l'une à l'autre quand elles se touchent suivant une courbe. Dans les quadriques la cbe de contact est plane.

– Quand 2 quadriques sont inscrites à une même quadrique, elles se coupent suivant 2 coniques (réelles ou imaginaires) dont les plans sont toujours réels (plans de symptose)

On peut aussi leur circonscrire 2 cônes (réels ou imaginaires) dont les sommets sont toujours réels (centres de homologie)

– Quand 3 quadriques sont inscrites à une même quadrique, elles ont 6 plans de symptose et 6 centres de homologie (deux pour chaque couple de surfaces)

176

Ces 6 plans de symptose se rencontrent 3 par 3 suivant 4 droites concourantes (arêtes d'un angle solide tétraèdre dont les 6 plans forment les 4 faces et les 2 plans diagonaux). Ces 4 droites sont dites droites de symptose communes aux 3 [surfaces].

— Les 6 centres d'homologie sont 3 par 3 sur 4 droites situées dans un même plan ; ils forment les sommets d'un quadrilatère plan complet. Ces 4 droites sont dites droites d'homologie communes aux 3 surfaces.

Tout point d'une droite de symptose commune est appelé point de symptose commun.

Tout plan passant par une droite d'homologie commune est un plan d'homologie commun.

— Quand 4 quadriques sont inscrites à une même quadrique, elles ont 8 points de symptose communs et 8 plans d'homologie communs.

Chacun de ces 8 points est le point d'intersection de 6 des plans de symptose des 4 surfaces prises 2 à 2.

Chacun de ces 8 plans contient 6 des 12 centres d'homologie des 4 surfaces prises 2 à 2.

Problème : Étant données 4 quadriques inscrites à une même quadrique, construire une nouvelle quadrique tangente aux 4 premières et inscrite dans la 5e.

On construira les 8 points de symptose et les 8 plans d'homologie communs aux 4 quadriques inscrites.

1e Solution : On prendra, par rapport à l'une quelconque A des surfaces, les pôles des 8 plans d'homologie, et l'on joindra chacun de ces pôles aux 8 points de symptose : les 64 droites ainsi obtenues rencontreront la surface A en 128 points, dont chacun sera

t de contact d'une des surfaces demandées avec la surface A.

2e Solution : On prendra, par rapport à l'une qcq. A des 4 surfaces les plans polaires des 8 points de symptose ; ces 8 plans rencontrent chacun des 8 plans d'homologie suivant 8 droites. Par les 64 droites ainsi obtenues, on mènera 2 plans tangents à la surface A : chacun des 128 points de contact sera le point de contact de une des surfaces demandées avec la surface A.

Il y a donc en général 128 solutions (16 par point de symptose commun, ou par plan de homologie commun aux 4 quadriques)

Si les 4 quadriques sont des sphères, elles n'ont qu'un point de symptose commun (leur centre radical) Il n'y a donc que 16 solutions.

Or 4 sphères quelconques, et une 5e sphère qui leur est tangente peuvent être considérées comme inscrites à une même quadrique. En effet, supposons que la quadrique circonscrite ait un axe nul : elle se réduit à une conique. Toutes les quadriques passant par cette conique peuvent être considérées comme inscrites à une même quadrique ; le plan de cette conique sera pour elles un plan de symptose. Si la conique devient imaginaire, le plan de symptose reste réel, d'où l'on conclut (par le principe des relations contingentes) que plusieurs quadriques ayant un plan de symptose commun peuvent être considérées comme inscrites à une même quadrique. Si le plan de symptose commun s'éloigne à l'infini, toutes les surfaces deviendront homothétiques. Donc :

Plusieurs quadriques homothétiques peuvent être considérées comme un système de quadriques inscrites à une même quadrique. Le problème revient dans ce cas à construire une quadrique à la fois tangente et homothétique à 4 quadriques homothétiques données.

Chasles. — Note XXIX:

Démonstration d'un théorème d'où résulte le principe de dualité.

Si l'on transforme un plan par rayons vecteurs réciproques, on obtient une sphère qui passe par le pôle et dont le centre est sur la perpendiculaire abaissée du pôle sur le plan. Les plans perpendiculaires aux rayons vecteurs aux points où ils rencontrent la sphère passent par l'extrémité du diamètre issu du pôle, c.à.d. par le point correspondant du plan.

Théorème. Si plusieurs plans passent par un même point (S) leurs points correspondants sont dans un même plan.

En effet, chacun de ces plans a pour transformée une sphère, et toutes ces sphères passent par le pôle P et par un même point O qui est le transformé du point d'intersection de tous les plans (S). La droite PO étant une corde commune à toutes les sphères, le plan perpendiculaire en O à cette droite passera par les extrémités de leurs diamètres issus du pôle, c.à.d. par les points correspondants de tous les plans, c.q.f.d.

Ainsi ce plan correspond au point S comme les points de ce plan correspondent aux plans qui passent par le point S : il en résulte une réciprocité entre les figures formées par des points, et les figures enveloppées par les plans correspondants à ces points, les unes étant les transformées des autres suivant le même procédé. Elles jouissent des propriétés de la dualité.

Charles. — Note ~~XXX~~ :

Sur les courbes et surfaces réciproques de Monge
Généralisation de cette théorie.

Courbes réciproques de Monge :

$p = \frac{dy}{dx}$ $$\begin{cases} x' = p \\ y' = px - y \end{cases} \qquad \begin{cases} x = p' \\ y = p'x' - y' \end{cases}$$

Surfaces réciproques de Monge :

$p = \frac{dz}{dx}$, $q = \frac{dz}{dy}$ $$\begin{cases} x' = p \\ y' = q \\ z' = px + qy - z \end{cases} \qquad \begin{cases} x = p' \\ y = q' \\ z = p'x' + q'y' - z' \end{cases}$$

A chaque plan tangent de la 1re surface correspond un point de la seconde ; et quand plusieurs plans tangents à la 1re passent par un même point, les points correspondants ~~sont~~ de la seconde sont dans un même plan.

Les surfaces réciproques se correspondent donc l'une à l'autre suivant le principe de dualité. En effet, elles sont polaires réciproques par rapport au paraboloïde de révolution :
$$x^2 + y^2 = \alpha z.$$

Application à l'intégration des équations aux dérivées partielles. Pour ces surfaces réciproques, on a entre les dérivées secondes les relations réciproques suivantes :
$$\left(rt - s^2 = \frac{1}{r't' - s'^2}\right)$$

$$\begin{cases} r' = \dfrac{t}{rt - s^2} \\ s' = -\dfrac{s}{rt - s^2} \\ t' = \dfrac{r}{rt - s^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \dfrac{t'}{r't' - s'^2} \\ s = -\dfrac{s'}{r't' - s'^2} \\ t = \dfrac{r'}{r't' - s'^2} \end{cases}$$

Autres surfaces réciproques (non polaires réciproques) inventées par Charles :

$$\begin{cases} x' = q \\ y' = -p \\ z' = -px - qy + z \end{cases} \qquad \begin{cases} x = q' \\ y = -p' \\ z = -p'x' - q'y' + z' \end{cases}$$

$$\begin{cases} r' = -\dfrac{r}{rt - s^2} \\ s' = -\dfrac{s}{rt - s^2} \\ t' = -\dfrac{t}{rt - s^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} r = -\dfrac{r'}{r't' - s'^2} \\ s = -\dfrac{s'}{r't' - s'^2} \\ t = -\dfrac{t'}{r't' - s'^2} \end{cases}$$

$$rt - s^2 = \frac{1}{r't' - s'^2}$$

Ces surfaces peuvent aussi servir à l'intégration des équa[tions] aux dérivées partielles —

Propriété mécanique de ces surfaces réciproques :

Une surface étant donnée, on pourra lui imprimer u[n] mouvement hélicoïdal infiniment petit, ayant pour a[xe] et tel que les plans normaux aux trajectoires de ses diff[érents] points dans ce mouvement seront précisément les plans t[angents] à la surface réciproque aux points correspondants.

Chasles : — Note XXXI.

Propriétés nouvelles des surfaces du second degré, analogues à celles des foyers dans les coniques.

— La tangente et la normale en un point d'une conique rencontrent chacun des deux axes principaux en 2 points qui sont conjugués harmoniques par rapport aux 2 foyers (réels ou imaginaires) situés sur cet axe. — De même. La normale et le plan tangent en un point d'une surface du 2e degré rencontrent chacun des 3 plans principaux en un point et ~~en~~ suivant une droite ; le point est le pôle de la droite par rapport à une conique située dans le plan principal.

Soit :
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$
l'équation de la surface ; les 3 coniques seront :
$$\frac{x^2}{a^2-c^2} + \frac{y^2}{b^2-c^2} = 1$$
$$\frac{x^2}{a^2-b^2} + \frac{z^2}{c^2-b^2} = 1$$
$$\frac{y^2}{b^2-a^2} + \frac{z^2}{c^2-a^2} = 1$$
Si $a > b > c$, on voit que la conique située dans le plan du grand et du moyen axe est une ellipse ; la conique située dans le plan du grand et du petit axe est une hyperbole. enfin la conique située dans le plan du moyen et du petit axe est imaginaire.

Ces coniques s'appellent coniques excentriques ou focales de la surface considérée.

De même qu'il y a dans les coniques un 3e couple de foyers imaginaires à l'infini, il y a dans les quadriques une 4e conique excentrique imaginaire et à l'infini.

Autre forme de la même propriété :

Si en chaque point d'une surface du 2e degré on mène la normale et les tangentes aux 2 lignes de courbure, ces 3 d... rencontreront chacun des 3 plans principaux en 3 poin... que la polaire de l'un d'eux par rapport à la conique exc... située dans ce plan passe par les deux autres.

Chacune des 3 coniques excentriques, est située dans le... d'une section principale; elle a pour foyers ceux de cette... et pour sommets les foyers des 2 autres sections princip...

Relation entre les 3 coniques excentriques :

Une des 3 coniques étant donnée, chacune des 2 autres se... un plan mené perpendiculairement à celui de la 1re, a... pour sommets les foyers et pour foyers les sommets de la... première, situés sur ~~l'un~~ cet axe principal. par l'un de ses axes p...

Quand 2 quadriques ont leurs sections principales décrites... mêmes foyers, elles ont les mêmes coniques excentriques; ... quement, quand 2 quadriques ont une même conique excentr... elles ont leurs sections principales décrites des mêmes foye...

— Théorèmes analogues pour les coniques et les quadri...

C. — Quand un angle est circonscrit à une conique, les ... de cet angle rencontrent chaque axe en 2 points conjug... harmoniques par rapport aux 2 foyers situés sur cet axe.

Q. — Quand un cône est circonscrit à une quadrique, ses ... principaux rencontrent chacun des plans principaux de la ... en 3 points tels que la polaire de ~~l'un~~ chacun d'eux, par r... à la conique excentrique de ce plan, passe par les 2 autres.

C. — Si ~~d'un~~ un point pris dans le plan d'une conique aux 2 ... les deux droites forment des angles égaux avec les 2 tangentes ... ce point ... respectivement ... du même

178

Q. — Si d'un point de l'espace on mène 2 cônes, l'un circonscrit à une quadrique, l'autre ayant pour base une de ses coniques excentriques, ces 2 cônes auront mêmes axes et mêmes lignes focales.
C. — Si l'on joint un point d'une conique à ses 2 foyers, la normale et la tangente en ce point sont bissectrices de l'angle des 2 rayons vecteurs.
Q. — Si l'on construit un cône ayant pour sommet un p. qcq. d'une quadrique, et pour base une de ses coniques excentriques, la normale et les tangentes aux 2 lignes de courbure en ce point seront les axes principaux de ce cône. (Réciproque)
Si la surface est un hyperboloïde à une nappe, les 2 lignes focales du cône seront les 2 génératrices de l'hyperboloïde qui passent par le sommet du cône.
Corollaire: Si par une tangente en un p. d'une quadrique on mène 2 plans tangents à l'une des coniques excentriques, ils seront également inclinés sur le plan tangent à la surface, mené par la tangente.
— Deux cônes ayant mêmes axes et mêmes lignes focales se coupent à angle droit; donc:
Le contour apparent d'une surface du 2e degré, vue d'un point qcq. de l'espace, et l'une de ses coniques excentriques, paraissent se couper à angle droit.
Les deux coniques excentriques réelles d'une quadrique, vues d'un point qcq. de l'espace, paraissent se couper à angle droit.
Les cylindres étant des cônes particuliers (sommet à l'infini) les théorèmes précédents sont encore vrais des projections sur un plan quelconque: ainsi:
Les projections orthogonales des deux coniques excentriques d'une quadrique sont d'un ~~coniques~~ homofocales. (sur un même plan)

C. — Si par un point qcque du plan d'une conique on
deux droites rectangulaires telles que le pôle de l'une par
à la conique soit sur l'autre, ces 2 droites rencontr
des axes principaux en 2 points conjugués harmonique
rapport aux foyers (réels ou imaginaires) situés sur ce

Q. — Si par un point quelconque de l'espace on mène 3
rectangulaires telles que la polaire de chacune d'elles, p
à une quadrique donnée, soit dans le plan des 2 autres
droites rencontreront chacun des 3 plans principaux de la
en 3 points qui seront tels, que la polaire de chacun d'eux
rapport à la conique excentrique de ce plan passe par les 2

C. — Toute transversale menée par le foyer d'une conique
pôle sur la perpendiculaire menée à cette transversale par l

Rem. Toute droite passant par un foyer peut être consid
comme tangente à une conique d'axe nul ayant pour so
les deux foyers, c.à.d. à la double excentricité —

Q. — Tout plan transversal tangent à une conique exc
d'une quadrique, a son pôle (pris par rapport à la surface)
la perpendiculaire menée à ce plan par son point de conta
avec la conique.

C. — Etant donnée une transversale qcque dans le plan d
si l'on prend son pôle par rapport à cette courbe, et le point
harmonique de celui où elle coupe le grand axe par rapport au
la droite qui joindra ces 2 points sera perp. à la transvers

Q. — Etant donné une quadrique et un plan transversal
si l'on prend son pôle par rapport à cette surface et le pôle
trace sur le plan d'une conique excentrique par rapport à
conique, la droite qui joindra ces 2 pôles sera perpendic
au plan transversal — (Ces théorèmes comprennent les précédents comme
particu

C. — Le produit des distances des foyers d'une conique à une tangente qcque est constant.

Q. — Pour chaque plan tangent à une quadrique, le produit de ses distances aux 2 points d'une des coniques excentriques où les tangentes à cette conique sont parallèles à ce plan, est constant.

C. — Le produit des distances d'un foyer d'une conique à deux tangentes parallèles est constant.

Q. — Le produit des distances de chaque point d'une conique excentrique d'une quadrique à 2 plans tangents à la surface, parallèles entre eux et parallèles à la tangente à la conique en ce point, est constant.

C. — Si par un foyer d'une conique on mène une droite parallèle à une tangente qcque à la courbe, la différence des carrés des distances de ces 2 droites au centre de la conique est constante.

Q. — Si l'on mène un plan tangent qcque à une quadrique et un plan parallèle au premier tangent à une conique excentrique, la différence des carrés des distances de ces 2 plans au centre de la surface est constante.

C. — Le sommet d'un angle droit dont un côté glisse sur une conique, et l'autre côté sur un foyer, ~~décrit~~ engendre la circonférence décrite sur le grand axe de la courbe comme diamètre.

Q. — Le sommet d'un angle trièdre trirectangle, dont une des faces glisse sur une quadrique, et dont les 2 autres faces glissent respectivement sur les 2 coniques excentriques, parcourt la sphère décrite sur le grand axe de la surface comme diamètre.

Analogie des coniques excentriques des quadriques avec lignes focales des cônes du 2e degré :

C. — Tout plan perpendiculaire à une ligne focale cou[pe] le cône suivant une conique ayant pour foyer le point [où] la ligne focale coupe ce plan.

Q. — Le plan normal à une conique excentrique en un de ses points coupe la quadrique suivant une conique ay[ant] un foyer en ce point.

§ 2. Propriétés de deux ou de trois surfaces qui ont les mêmes coniques excentriques.

Par un point qcque de l'espace on peut faire passer 3 q[uadriques] ayant pour conique excentrique une conique donnée : u[n] un ellipsoïde, un hyperboloïde à une nappe et un hyperbo[loïde] à 2 nappes ; ces 3 surfaces se coupent à angles droits (et [suivant] leurs lignes de courbure, Dupin) Les 3 tangentes à leurs [...] au point donné sont les axes principaux du cône ayant [ce point] pour sommet et pour base la conique excentrique don[née] et les lignes focales du cône sont les 2 génératrices de l'hyperb[oloïde] à une nappe qui passent par son sommet.

Corollaire : Quand 2 surfaces du ~~2e degré~~ ont une même conique excentrique, si l'on prend un point qcque de l'espace pour sommet de 2 cônes circonscrits respectivt. aux 2 surf[aces] ces 2 cônes auront mêmes axes principaux et mêmes lignes foc[ales] les 3 axes principaux seront les normales aux 3 ~~surfaces~~ quadriques qu['on] pourrait faire passer par le sommet commun des cônes, et q[ui] auraient les mêmes coniques excentriques que les surfaces do[nnées] et les 2 lignes focales seront les génératrices de l'hyperboloïde à [une] nappe qui est ~~une des~~ l'une des 3 quadriques.

Corollaire : Quand 2 quadriques ont une même conique excentrique, leurs contours apparents, vus d'un point quelconque, semblent se couper à angle droit. — Si le point de vue est à l'infini :
Les projections de ces 2 surfaces sur un plan quelconque sont 2 coniques homofocales (en particulier, leurs sections principales)

C. — Si sur la tangente et la normale en un point d'une conique prises pour axes principaux, on construit deux autres coniques, passant par le centre de la conique donnée et normales respectivement à ses 2 axes principaux, ces coniques seront homofocales, et dans chacune d'elles, l'axe dirigé suivant la normale à la proposée sera égal à l'axe qui dans celle-ci est normal à la ~~nouvelle~~ conique considérée. (cf. note $\overline{\underline{XXV}}$)

Q. — Si la normale et les 2 tangentes aux lignes de courbure en un point d'une quadrique sont prises pour axes principaux de 3 autres quadriques passant par le centre de la proposée et normales respectivement à ses 3 axes principaux, ces quadriques auront mêmes coniques excentriques, et dans chacune d'elles, l'axe dirigé suivant la normale à la proposée sera égal à l'axe de celle-ci qui est normal à la quadrique considérée.

Quand deux quadriques sont homofocales (dont les sections principales sont homofocales, ou qui ont les mêmes coniques excentriques) on a :

$$a^2 - a'^2 = b^2 - b'^2 = c^2 - c'^2$$

Quand deux quadriques sont homofocales, si l'on mène 2 plans parallèles tangents respectivement à ces 2 surfaces, la différence des carrés des distances au centre des 2 surfaces est constante.

Corollaire : Quand un ellipsoïde et un hyperboloïde ont mêmes coniques excentriques, les plans tangents à l'ellipsoïde, parallèles aux plans tangents du cône asymptote de l'hyperboloïde, sont à une distance constante du centre commun des 2 surfaces.

Dans deux quadriques de même espèce, on appelle points corr[espondants]
2 points dont les coordonnées suivant chaque axe sont propo[rtionnelles]
à cet axe. — Quand deux quadriques de même espèce so[nt]
homofocales, la différence des carrés de 2 demi-diamètres a[bou]
tissant à 2 points correspondants est constante. — La d[istance]
entre 2 points quelconques pris respectivement sur les 2 surfaces est égale [à]
la distance des 2 points correspondants (cf. Ivory, Attraction [des] ellips[oïdes])

C. — Quand 2 ellipses sont homofocales, si par un point p[ris]
sur un de leurs axes on mène 2 transversales qui fassent av[ec]
l'autre axe des angles dont les cosinus soient proportionn[els]
aux diamètres des 2 ellipses dirigés suivant ce second a[xe],
les segments interceptés respectivement par les 2 ellip[ses]
sur ces 2 transversales seront proportionnels aux diam[ètres]
dirigés suivant le premier axe. (Mac-Laurin, Tr. des Fluxion[s])

Q. — Quand 2 quadriques sont homofocales, si par un point
pris sur un de leurs axes, on mène une transversale à la 1re su[rface]
puis une seconde transversale telle que les cosinus des angles q[u'elles]
font avec chacun des 2 autres axes soient proportionnels a[ux]
diamètres des surfaces dirigés suivant ces axes : les segm[ents]
interceptés sur les 2 transversales respectivement par les 2 sur[faces]
seront proportionnels aux diamètres des 2 surfaces dirigés sui[vant]
le 1er axe ; les sinus des angles que les 2 transversales font ave[c le]
1er axe seront proportionnels aux diamètres des 2 surfaces [qui]
passent par les points où les 2 transversales percent le pla[n]
diamétral perpendiculaire au 1er axe ; et ces deux diam[ètres]
seront correspondants dans les 2 surfaces.

Application à l'attraction d'un ellipsoïde sur un point pla[cé]
sur un de ses axes (cf. Traité des fluxions, 653.)

C. — Quand 2 coniques sont homofocales, si d'un point pris sur un des axes on leur mène 2 tangentes, les cosinus des angles qu'elles font avec l'autre axe sont proportionnels aux 2 diamètres dirigés suivant cet axe.

Q. — Quand 2 quadriques sont homofocales, si par une droite située dans un de leurs plans principaux on leur mène 2 plans tangents, les cosinus des angles qu'ils forment avec l'axe perpendiculaire à ce plan principal sont proportionnels aux 2 diamètres dirigés suivant cet axe.

(cf. Legendre, Mém. sur l'attraction des ellipsoïdes, Acad. Sc. 1788)

§ III Systèmes de surfaces du second degré ayant mêmes coniques excentriques.

— On peut décrire dans un plan une infinité de coniques ayant pour foyers 2 points donnés : elles forment 2 séries d'ellipses et d'hyperboles orthogonales les unes aux autres.

R. — On peut former une infinité de quadriques ayant pour conique excentrique une conique donnée ; 3 séries : ellipsoïdes, hyperboloïdes à une nappe, hyperboloïdes à 2 nappes. Deux surfaces quelconques, d'espèce différente, se coupent partout à angle droit, suivant une ligne de courbure commune. Trois surfaces quelconques, d'espèces différentes, se coupent en 8 points ; en chacun d'eux les normales aux surfaces sont les axes principaux du cône qui a ce point pour sommet, et pour base une des coniques excentriques communes aux 3 surfaces ; et les 2 génératrices de l'hyperboloïde à 1 nappe qui passent en ce point sont les 2 lignes focales du cône.

— Les coniques homofocales jouissent des propriétés d'un système de coniques inscrites à un même quadrilatère ; les côtés du quadrilatère sont imaginaires, mais ses 2 sommets opposés, réels, sont les 2 foyers.

La droite qui joint les 2 foyers peut être considérée comm[e]
des coniques inscrites au quadrilatère. (Poncelet)

Q. — Les quadriques homofocales peuvent être considé[rées]
comme inscrites à une même surface développable imagin[aire]
mais ayant 2 lignes de striction réelles, à savoir les 2 co[niques]
excentriques communes aux surfaces. Les 2 autres lignes [de]
striction sont imaginaires; l'une est la 3e conique ex[centrique,]
l'autre est à l'infini. Les 2 lignes de striction réelles peuven[t être]
regardées comme des surfaces dont un axe est nul; elles ap[par]-
tiennent donc au système des quadriques homofocales.

Th: — Des quadriques ayant mêmes coniques excentriques,
ces 2 coniques, considérées comme des surfaces infiniment [aplaties]
jouissent de toutes les propriétés d'un système de quad[riques]
inscrites à une même surface développable.

Etant donnés plusieurs quadriques homofocales, si l'on [mène]
un plan transversal qcque, qui les coupe suivant des co[niques]
et qu'on prenne ces coniques pour les courbes de con[tact]
d'autant de cônes circonscrits à ces surfaces, tous ces [cônes]
auront leurs sommets sur une même droite perpendic[ulaire]
au plan transversal; en d'autres termes les pôles de ce [plan]
par rapport aux surfaces sont sur une perpendiculaire à [ce plan].

Corollaire: Considérant les 2 coniques excentriques d'une [surface]
si l'on mène un plan transversal qcque, et qu'on prenne [par]
rapport à chaque conique le pôle de la trace du plan tra[nsversal]
sur le plan de cette courbe, la droite qui joint les 2 pôles [est]
perpendiculaire au plan transversal. — Si ce plan transve[rsal]
est tangent à la quadrique, cette droite sera la normale [en ce point]
(car ce point sera le pôle du plan transversal par rapport à [la surface]).

— Si par une ~~point~~ droite qcque de l'espace on mène des plans ta[ngents]
à des quadriques homofocales, les normales à ces surfaces [...]

les points de contact forment un paraboloïde hyperbolique.

Si la droite est normale à une des quadriques, le paraboloïde se réduit à une conique, et les points de contact sont sur une courbe plane du 4e degré.

Si la droite est dans un des plans principaux, les points de contact sont sur une circonférence.

— Si l'on prend un point qcq. de l'espace pour sommet commun de cônes circonscrits à des quadriques homofocales, les plans des courbes de contact envelopperont une surface développable telle que chacun de ses plans tangents la coupe suivant une conique; les 3 plans principaux des quadriques et les 3 plans principaux des cônes circonscrits seront tangents à cette surface développable. Cette surface est du 4e degré, et son arête de rebroussement est la courbe gauche du 3e degré.

— Si d'un point qcq. de l'espace on mène des normales à des quadriques homofocales, ces normales formeront un cône du second degré; les plans tangents aux quadriques menés par les pieds des normales envelopperont une surface développable du 4e degré.

— Étant donné un système de quadriques homofocales, si d'un point pris dans un de leurs plans principaux on leur mène des normales toutes ces normales seront situées dans 2 plans, le plan principal et un plan perpendiculaire à ce plan principal; les pieds des normales comprises dans le plan principal seront sur une courbe du 3e degré, dite focale à nœud (Quételet)[1]; les pieds des normales comprises dans le 2e plan sont sur une circonférence ayant pour diamètre la perpendiculaire abaissée du point fixe sur la polaire de ce point par rapport à la conique excentrique du plan principal où est ce point; les plans tangents aux quadriques menés par les pieds des prem. normales, enveloppent un cylindre parabolique; ceux menés par les pieds des

(1) lieu des foyers des sections faites dans un cône droit par des plans menés par une droite fixe, tangente au cône et perpendiculaire à l'arête du p. de contact.

autres normales passent toutes par une même droite du plan

— Si l'on mène des normales parallèles entre elles à des q[uadriques]
homofocales, le lieu des pieds de ces normales sera une h[yperbole]
équilatère, dont une asymptote sera parallèle à ces norm[ales]

— Si l'on mène un plan transversal qcq à des quadri[ques]
homofocales, et qu'on trace toutes les normales aux quadri[ques]
situées dans ce plan, ces normales envelopperont une cou[rbe]
les plans tangents aux surfaces menés par les pieds de ces nor[males]
passeront tous par une même droite; les pieds des normales
les surfaces formeront une focale à nœud

C. — Le sommet d'un angle droit dont les côtés gliss[ent sur]
2 coniques homofocales décrit une circonférence

Q. — Quand 3 plans rectangulaires sont respectivement [tangents]
à 3 quadriques homofocales, le point d'intersection de ces 3
se trouve sur une sphère. (Bobillier, Ann. de Math. XI[X]

Chasles. — Note XXXII :

Théorèmes analogues, dans les surfaces du second degré, aux théorèmes de Pascal et de Brianchon dans les coniques.

On peut formuler le théorème de Pascal comme suit :

Étant donné une conique et un triangle dans son plan, les 3 cordes de la conique inscrites dans les angles du triangle rencontrent les côtés opposés du triangle en 3 points qui sont en ligne droite.

— Quand les 6 arêtes d'un tétraèdre rencontrent une quadrique en 12 points, ces 12 points sont trois à trois sur 4 plans dont chacun contient 3 points appartenant aux 3 arêtes issues d'un même sommet ; ces 4 plans rencontrent respectivement les faces opposées à ces sommets suivant 4 droites qui sont des génératrices de même système d'un hyperboloïde à une nappe.

Corollaires : Quand les 6 arêtes d'un tétraèdre sont tangentes à une surface du second degré, le plan des 3 points de contact des arêtes issues d'un même sommet rencontre la face opposée suivant une droite ; les 4 droites ainsi déterminées appartiennent à un même hyperboloïde à une nappe.

Quand un tétraèdre est inscrit à une quadrique, les plans tangents menés par ses sommets rencontrent respectivement les faces opposées suivant 4 droites qui sont des génératrices d'un même hyperboloïde.

On peut formuler le théorème de Brianchon comme suit :

Étant donné une conique qcque et un triangle dans son plan, si l'on joint le point d'intersection de 2 tangentes issues de 2 sommets du triangle au 3e sommet, les 3 droites ainsi obtenues concourent en un même point.

— Si par les 6 arêtes d'un tétraèdre qcque on mène 12 plans tangents

à une quadrique, ces 12 plans se rencontrent trois à trois
points dont chacun est l'intersection de 3 plans menés par
arêtes d'une même face; les droites qui joignent ces 4 po
respectivement aux 4 sommets opposés à ces faces sont
génératrices de même système d'un hyperboloïde à une n

Corollaires: Quand les 6 arêtes d'un tétraèdre sont ta
à une quadrique, les plans tangents menés par les arêtes
même face se rencontrent en un point; si l'on joint chac
ces 4 points au sommet opposé, on obtient 4 droites
sont des génératrices de même système d'un hyperboloïde

Quand un tétraèdre est circonscrit à une quadrique, les
qui joignent ses sommets respectivement aux points de
des faces opposées sont 4 génératrices d'un hyperboloïde

2 Théorèmes généraux sur un tétraèdre et une quadriq
placés d'une manière qcq dans l'espace.

— Les droites qui joignent les sommets du tétraèdre respec
aux pôles des faces opposées (pris par rapport à la surface)
4 génératrices de même système d'un hyperboloïde
Les droites d'intersection des faces du tétraèdre avec les p
polaires des sommets opposés sont 4 génératrices d'un hyper

— Le plan polaire de chaque sommet rencontre les arêtes iss
de ce sommet en 3 points: on a ainsi 12 points, qui sont
situés sur une même quadrique; si par le pôle de chaque f
~~ou même~~ et les 3 arêtes de cette face on mène 3 plans, on
obtient 12 plans qui sont tangents à une même quadri
(Toujours la dualité)

— Ces théorèmes sont des propriétés d'un tétraèdre quelconque et du
tétraèdre polaire réciproque par rapport à une quadrique, ~~c. à d. dont les sommets~~ son
les pôles des faces et les faces les plans polaires des sommets
prem

Charles. — Note XXXIV :

Sur la dualité dans les Sciences mathématiques.

Deux espèces de géométrie : à la géométrie cartésienne où le point joue le rôle d'élément, de monade, s'oppose une nouvelle géométrie où ce rôle est dévolu à la droite (en géométrie plane) ou au plan (dans l'espace) [coordonnées tangentielles]

Dualisme universel de Chasles (cf. note V : la géométrie a un double objet : ordre et mesure : d'où projective, métrique)

Exemple de dualité, pris dans l'Art du tourneur :

Deux manières de décrire une courbe ou d'engendrer un profil : faire tourner l'outil en fixant l'ouvrage ; 2° faire tourner l'ouvrage en fixant l'outil.

Tout mouvement d'une figure plane dans un plan peut être rapporté à une figure fixe de ce plan, et représenté par le roulement d'une courbe mobile sur une courbe fixe. Si, inversement, on fait rouler la courbe fixe sur la courbe mobile, en fixant celle-ci, chaque point de celle-ci (devenu fixe) décrira sur le plan de l'autre (devenu mobile) la même ~~courbe~~ figure qu'il décrivait dans le premier mouvement, quand il était mobile, et le plan fixe.

Deux manières de décrire des courbes, avec un stylet mobile sur un plan fixe, ou avec un stylet fixe sur un plan mobile.

Exemple : double description de l'ellipse : par un point lié à 2 points qui glissent sur 2 droites fixes, ou par un point fixe d'un plan fixe sur un plan mobile dont 2 droites glissent sur 2 points fixes du plan fixe (Tour à ovale de Léonard de Vinci)

De même pour toutes les épicycloïdes —

Conchoïde de Nicomède : Angle invariable dont un des côtés glisse sur un point fixe, et dont l'extrémité de l'autre côté glisse sur une droite passant par ce point fixe, et portant le stylet en un autre point fixe

De même pour la cissoïde de Dioclès, la focale à nœud,
général toutes les podaires de la parabole.
On peut construire aussi les courbes en les concevant, non c
le lieu d'un point, mais comme l'enveloppe d'une droi
remplaçant le stylet par une lame tranchante.
[Quoi qu'en dise Chasles, ces exemples ne se rapportent pas à la
de l'espace, mais à la relativité du mouvement. L. C.
Exemple de Dualité, pris dans la Mécanique céle
Double mouvement de translation et de rotation des a
De même, tout déplacement infiniment petit d'un c
compose d'un double mouvement analogue ~~[illegible]~~ (hélicoïdal
La rotation est un mouvement primitif et élémen
que l'on devrait traiter directement comme la translat
au lieu de l'en faire dériver. En dynamique, le couple e
élément irréductible comme la force.
Composition des rotations et des couples, analogue à cell
translations et des forces (un système de rotations peut
réduire à 2 rotations ~~autour~~ de 2 axes dont un arbitr
si l'on place cet axe à l'infini, on a 1 rotation et 1 tran
Cf. Poinsot, Th. de la rotation des corps ; Aug. Comte, Ph. pos
Analogie des forces et des moments (les unes relatives aux
les autres aux plans.) On retrouve (aussi) en mécanique la dualit

Chasles. — Additions.

Théorème de Desargues : Si deux triangles situés dans l'espace ou dans un même plan ont leurs sommets placés deux à deux sur trois droites concourantes, leurs côtés se rencontrent deux à deux ~~sur~~ en trois points situés sur une même droite.

La réciproque est vraie.

Théorème correspondant, de Poncelet. Quand deux tétraèdres ont leurs sommets placés deux à deux sur 4 droites concourantes, les plans de leurs faces se coupent deux à deux suivant 4 droites qui sont dans un même plan.

Généralisé par Chasles : Quand deux tétraèdres ont leurs sommets placés deux à deux sur 4 génératrices de même système d'un hyperboloïde à une nappe, leurs faces se coupent deux à deux suivant 4 ~~autres~~ droites qui sont les génératrices d'un autre hyperboloïde.

Théorème général sur la relation projective dans un plan : Si l'on a dans un plan deux figures qui peuvent être mises en perspective, de sorte que leurs points homologues se correspondent, il y a en général 3 points de l'une qui coïncident avec leurs ~~homo~~logues de l'autre. Un de ces points est toujours réel ; les deux autres peuvent être imaginaires.

Corollaire : il y a aussi en général 3 droites de l'une des figures qui coïncident avec leurs homologues dans l'autre. Une de ces droites est toujours réelle ; les deux autres peuvent être imaginaires. (cf. mém. sur le princ. d'homographie, fin.)

Dans le cas des figures semblables (ou égales) il n'y a qu'un point réel, et qu'une droite réelle, à l'infini.

Gnomonique de La Hire : Construire les lignes horaires [d'un] cadran solaire, en connaissant sept consécutives.

Soient X, XI, XII, I, II, III, IV les sept lignes conn[ues].
Par un point° de IV on mène une parallèle à X, qui [coupe] les 5 autres en a, b, c, d, e. On porte sur la transversale de l'autre côté de o, des longueurs oa' = oa, ~~ob'~~ ob' = ob, ... oe' = oe. Les lignes Oa', Ob', ... Oe' sont les 5 lignes hor[aires] suivantes.

En effet, les ~~lignes~~ (plans horaires) X et IV, étant perpendiculaires, avec 2 plans horaires équidistants un faisceau harmo[nique], les lignes horaires correspondantes forment aussi un fai[sceau] harmonique, et déterminent sur une transversale quelc[onque] une division harmonique : en partic. sur une parallèle elles interceptent des segments égaux : oa = oa', ... oe

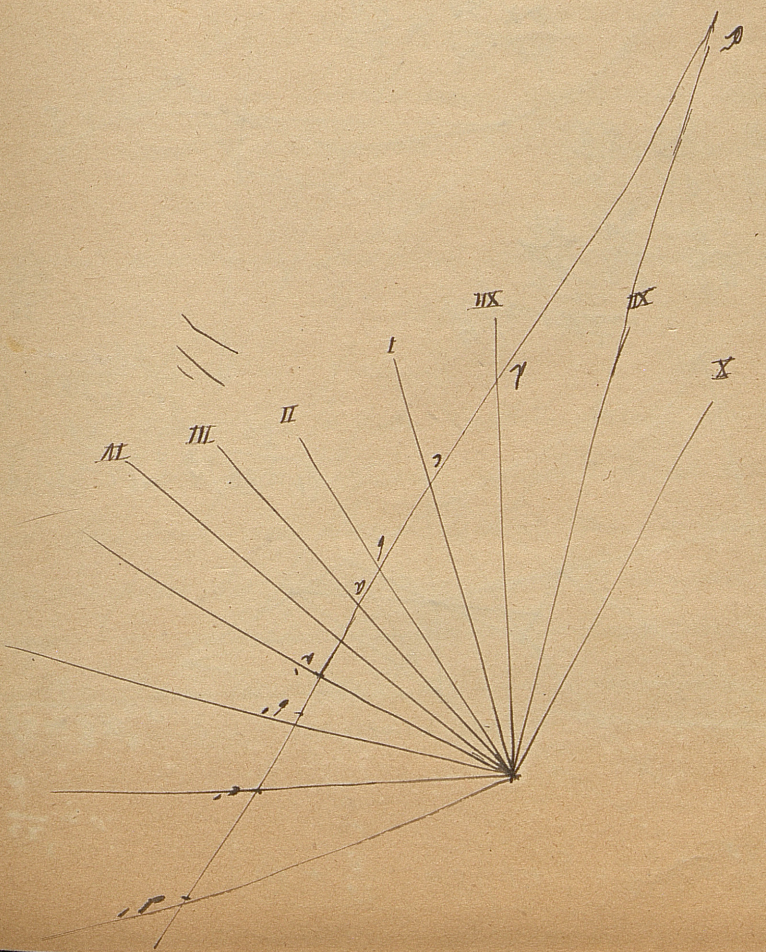
— Solution plus générale et plus simple de Chasles : Connaissant 3 lignes horaires qqcques, on peut constr[uire] une 4e ligne horaire quelconque au moyen du rapp[ort] anharmonique des 4 plans horaires correspondants. En effet, soient A, B, C, D ces 4 plans, a, b, c, d les 4 l[ignes] correspondantes (d l'inconnue); α, β, γ, δ les points où [une] transversale qcque les rencontre ; on a :

$$n = \frac{\sin \widehat{C,A}}{\sin \widehat{C,B}} : \frac{\sin \widehat{D,A}}{\sin \widehat{D,B}} = \frac{\sin \widehat{c,a}}{\sin \widehat{c,b}} : \frac{\sin \widehat{d,a}}{\sin \widehat{d,b}} = \frac{\gamma\alpha}{\gamma\beta} : \frac{\delta\alpha}{\delta\beta}$$

Pour construire graphiquement la valeur de n, il suffit de [mener] dans un plan 4 droites OA, OB, OC, OD faisant entre elles mêmes angles que les 4 plans, et de mener une transversale para[llèle à] OA, qui coupe OB, OC, OD en β', γ', δ' : $n = \frac{\delta'\beta'}{\gamma'\beta'}$

Si l'on mène une transversale parallèle à la droite a, on devra avoir : $\frac{\delta\beta}{\gamma\beta} = n$, ce qui détermine le point δ sur cette transversale

Chasles.



$$\sqrt{6h + \frac{6h}{3}} = 8\sqrt{1+\frac{1}{3}} = 8\sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{16}{\sqrt{3}}.$$

$$h - \frac{2x^2}{4} = 0.$$

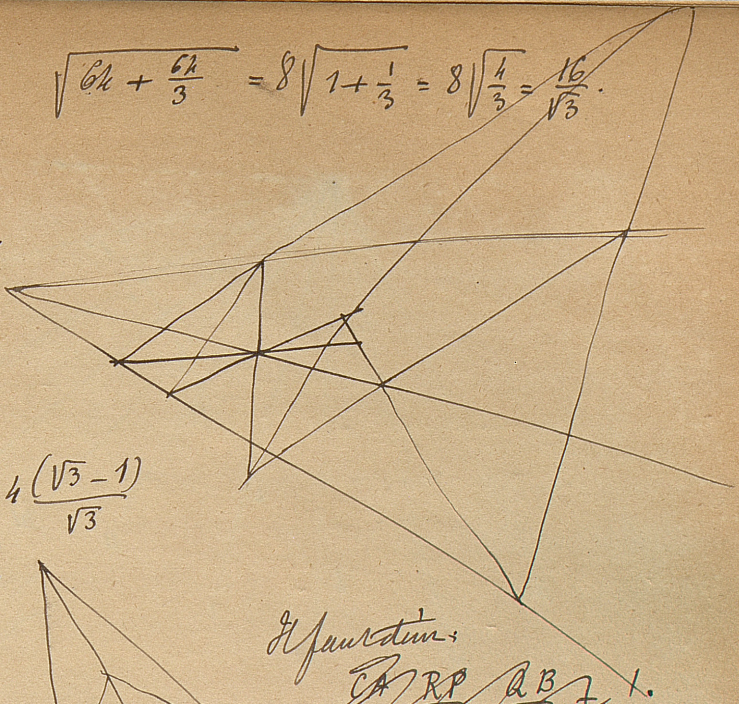
$$\frac{6h - 3x^2}{4} = 0.$$

$$x = \frac{8}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{8(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{3}} = 4\frac{(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}}$$

$$4+8 = \frac{4(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}}$$

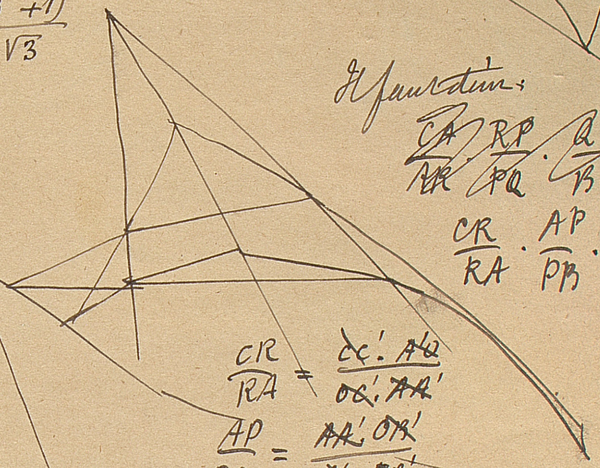
$$\cancel{\frac{32}{3}}$$

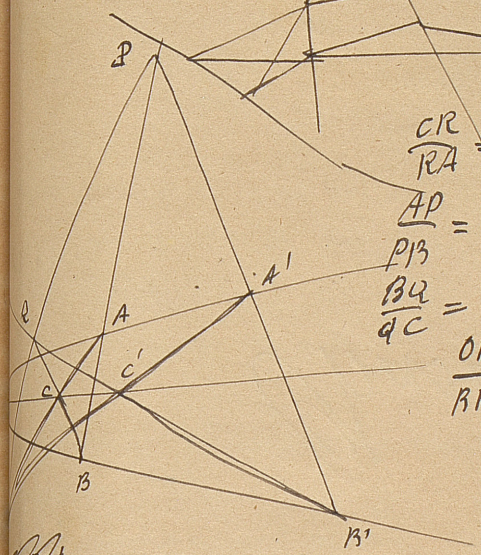


Menelaus:

$$\cancel{\frac{CA}{AR}} \cdot \cancel{\frac{RP}{PQ}} \cdot \cancel{\frac{QB}{BC}} = 1.$$

$$\frac{CR}{RA} \cdot \frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} = 1.$$





$$\frac{CR}{RA} = \frac{\cancel{OC'} \cdot \cancel{AQ}}{\cancel{OC} \cdot \cancel{AA'}}$$

$$\frac{AP}{PB} = \frac{\cancel{AA'} \cdot \cancel{OB'}}{\cancel{AO} \cdot \cancel{BB'}}$$

$$\frac{BQ}{QC} = \frac{\cancel{OC'} \cdot \cancel{BB'}}{\cancel{OB} \cdot \cancel{CC'}}$$

$$\frac{OB'}{BB'} \cdot \frac{BP}{PA} = \frac{OC'}{CC'} \cdot \frac{CR}{RA}$$

$$\cancel{\frac{BR}{}} \frac{OB'}{BB'} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CC'}{C'O} = 1.$$

$$\cancel{\frac{PA}{PB}} \cdot \frac{AA'}{A'O} \cdot \frac{OB'}{B'B} \cdot \frac{BP}{PA} = 1.$$

$$\frac{AA'}{A'O} \cdot \frac{BP}{PA} = \frac{CC'}{C'O} \cdot \frac{BQ}{QC}.$$

$$\frac{AA'}{A'O} \cdot \frac{OC'}{C'C} \cdot \frac{CR}{RA} = 1.$$

$$\frac{BP}{PA} : \frac{CC'}{C'O} = \frac{CR}{RA} : \frac{OB'}{BB'}$$

$$\frac{BP}{PA} : \frac{CC'}{C'O} = \frac{BQ}{QC} : \frac{AA'}{A'O}$$

(présenté à l'Académie des sciences de Bruxelles en déc. 1829 pour répondre à une question mise au concours)

Chasles : Mémoire de Géométrie sur deux principes généraux de la science : la dualité et l'homographie

Première partie. Principe de dualité.

Théorème I. Si les paramètres de l'équation d'un plan mobile ~~en coordonnées~~ rapporté à 3 axes contiennent au 1er degré les coordonnées d'un point mobile, dit point directeur :

1° Quand ce point parcourt un ~~droite~~ plan, le plan tourne autour d'un point ;

2° Quand ce point parcourt une droite, le plan tourne autour d'une autre droite ;

3° Quand ce point parcourt une surface d'ordre n, le plan roule sur une surface de classe n

– Soit : $X x_1 + Y y_1 + Z z_1 = U$ l'éq. du plan

$x_1\, y_1\, z_1$ étant les coordonnées du point directeur ;

X, Y, Z, U étant des polynômes de la forme : $ax + by + cz + d$

Soit : $Lx + My + Nz = 1$ l'éq. du plan fixe parcouru par le point directeur. Le plan mobile passera par le point fixe :

$$X = LU, \qquad Y = MU, \qquad Z = NU$$

appelé pôle du plan fixe.

Th. II Le point où le plan mobile touche sa surface enveloppe A' est le pôle du plan tangent à la surface A au point directeur du plan ; de sorte que la surface A' est le lieu des pôles des ~~plans~~ tangents à la surface A, de même ~~que la surface A est le lieu des pôles des plans tangents à la surface A' (d'où réciprocité entre les 2 surfaces)~~ qu'il est l'enveloppe des plans ayant pour points directeurs les points de la surface A.

Th. III : Quand le point directeur se meut à l'infini, le plan mobile tourne autour d'un point fixe, comme si le point directeur parcourait un plan.

Ce point fixe a pour coord : $X=0,\ Y=0,\ Z=$
A ce point correspond le plan : $L=0,\ M=0,\ N=$
dit plan de l'infini. Donc

L'espace indéfini a pour enveloppe un plan (Ponc

Th. IV : Le rapport anharmonique de 4 positions du directeur sur une même droite est égal au rapp. anharm des 4 positions correspondantes du plan.

Corollaire : Sur une droite qcq. il existe en général 2 p tels que le plan correspondant passe par ce point.

Quand le plan mobile passe par son point directeur, ce point a pour lieu une surface ~~du~~ de 2e degré (1) *(à chacun d'eux)*

Car si dans l'équation : $Xx_1 + Yy_1 + Zz_1 = 0$
on fait $x = x_1,\ y = y_1,\ z = z_1$, on a une éq. du 2e d

Th. V. Etant donnés 5 positions du point directeur, on choisir arbitrairement les 5 positions correspondantes du p

En général, si les 3 coefficients d'un plan ont entre eux relation du degré m, son enveloppe sera une surface de classe m

En effet, si dans l'équation du plan : $x_1x + y_1y + z_1z =$
$x_1\, y_1\, z_1$ ~~sont les coord. d~~ ont entre eux une relation de m, ce seront les coordonnées d'un point d'une surface m (cf. th. I, 3°)

(1) à moins que l'équation du plan ne devienne identique on y fait : $x = x_1,\ y = y_1,\ z = z_1$, auquel cas le plan constamment par son point directeur (cas du plan normal trajectoire du point

Principe de dualité :

<u>1e partie</u>. Etant donnée une figure quelconque ds l'espace, on peut former, d'une infinité de manières, une autre figure dont les <u>points</u>, <u>droites</u> et <u>plans</u> correspondent respectivement aux <u>plans</u>, <u>droites</u> et <u>points</u> de la première ; les plans correspondant aux points d'un même plan passent par un même point ; les plans correspondant aux ~~plans~~ points d'une même droite passent par une même droite. Les points d'une surface d'ordre n ont pour correspondants les plans tangents à une surface de classe n. et les ~~plans~~ tangents à la 1e ~~auront~~ pour correspondants encor points les points de contact des plans ~~tangents~~ à la 2e. ~~qui correspondent~~

Enfin tous les points situés à l'infini correspondants dans la 1e figure forment un plan, et tous les plans correspondants passent par un même point de la 2e figure qui correspond au plan ~~de~~ l'infini de la 1e

A des droites parallèles entre elles correspondent des droites situées dans un même plan passant par le point correspondant à l'infini. A des plans parallèles correspondent des points situés sur une même droite passant par le point correspondant à l'infini. A des plans parallèles à une même droite correspondent des points situés dans un même plan passant par le point correspondant à l'infini.

<u>2e partie</u>. Dans 2 figures corrélatives, à 4 points de la 1e situés en ligne droite, correspondent ds la 2e 4 plans passant par une même droite, et dont le rapport anharmonique est égal au rapport anharmonique des 4 points ; <u>et réciproquement.</u>

Ici : $\frac{\sin CA}{\sin CB} : \frac{\sin DA}{\sin DB} = \frac{ca}{cb} : \frac{da}{db}$ on conclut : $\frac{\sin CA}{\sin CB} : \frac{ca}{cb} = C^{te}$

Soient les 3 plans A, B, C de la 1e figure, m un point de

Soient a, b, c les 3 points correspondants, M le plan corr

passant par c. — Le rapport des distances du point m

2 plans A et B est proportionnel au rapport des distan

points $\underline{a}$ et $\underline{b}$ au plan M.

Dans le cas particulier où le plan B est à l'infini :

La distance d'un point qcque $\underline{m}$ de la 1e figure au pl

est proportionnelle au rapport des distances du plan co

M de la 2e figure aux 2 points $\underline{a}$ et $\underline{i}$, dont le

correspond au plan A, cte 2e au plan de l'infini de la

A une courbe gauche correspond une surface dével opp

A une courbe plane correspond un cône.

Si l'on transforme, par le principe de dualité, la proprié

suivante des quadriques « 2 plans tangents à une quad

étant parallèles, la droite qui joint les 2 points de conta

passe par le centre $\underline{o}$ de la surface, et l'on a : oa = o

on obtient la propriété des pôles et plans polaires :

Si par un point fixe on mène une transversale à une

les plans tangents aux 2 points où cette transversale ren

la surface se coupent sur un plan fixe, et la transv

rencontre ce plan fixe au point conjugué harmoniq

point fixe par rapport aux 2 points de la surface.

$$\frac{\sin OA}{\sin OB} : \frac{\sin IA}{\sin IB} = \frac{\omega\alpha}{\omega\beta} : \frac{i\alpha}{i\beta} = \frac{oa}{ob} = 1.$$

Le plan qui correspond de la 2e fig au centre de la 1e fi

a pour pôle par rapport à la 2e quadrique le point corre

à l'infini de la 1e fig. (le point i.) I est le plan corresp. au poin

L'intersection des 2 plans tangents est la polaire de la droite q

les 2 points de contact. (V. Mémoire sur le principe d'homog

Transformation des propriétés des figures homothétiques.

Quand 2 tétraèdres ont leurs sommets situés deux à deux sur 4 droites concourant en un même point i, leurs faces se coupent deux à deux suivant 4 droites contenues dans un même plan V. Le rapport des distances du point i à 2 sommets homologues des 2 tétraèdres est proportionnel au rapport des distances de ces 2 sommets au plan V. (Poncelet.)

C'est le principe de la théorie des figures homologiques: i est le centre d'homologie, V le plan d'homologie (Voir Mém. sur le principe d'homographie.)

Transformation du centre des moyennes distances en centre des moyennes harmoniques (par dualité)

Étant donnés plusieurs points $a, b, c, \ldots$ en ligne droite, en nombre n il existe sur cette droite un point g tel que pour un point m quelconque de la droite on ait la relation:

$$ma + mb + mc + \ldots = n . mg$$

ou:

$$\frac{ma}{mg} + \frac{mb}{mg} + \frac{mc}{mg} + \ldots = n.$$

Dans la figure corrélative, on a les plans $A, B, C \ldots G, M$ passant par une même droite, et le plan I passant par cette droite et correspondant au point à l'infini sur la droite am

On a:

$$\frac{\sin MA}{\sin MG} : \frac{\sin IA}{\sin IG} + \frac{\sin MB}{\sin MG} : \frac{\sin IB}{\sin IG} + \ldots = n$$

ou

$$\frac{\sin MA}{\sin IA} + \frac{\sin MB}{\sin IB} + \ldots = n \frac{\sin MG}{\sin IG}$$

Transversale $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \vartheta, \mu, \iota$:

$$\frac{\mu\alpha}{\iota\alpha} + \frac{\mu\beta}{\iota\beta} + \frac{\mu\gamma}{\iota\gamma} + \ldots = n . \frac{\mu\vartheta}{\iota\vartheta}$$

m et μ sont arbitraires; envoyons μ à l'infini:

il vient : $\frac{1}{\iota\alpha} + \frac{1}{\iota\beta} + \frac{1}{\iota\gamma} + \dots = \frac{n}{\iota\vartheta}$

$\iota\vartheta$ est la moyenne harmonique entre $\iota\alpha$, $\iota\beta$, $\iota\gamma$ (Mac
et ϑ est le centre des moyennes harmoniques des p
$\alpha, \beta, \gamma \dots$ par rapport au point ι. (Poncelet)

Théorème : Si l'on mène une transversale qcque à pl
plans A, B, C.... et I passant par une même droite,
centre des moyennes harmoniques des points où elle
les plans A, B, C... par rapport au point où elle
le plan I se trouve dans un plan fixe G passant
la même droite.

– Si au lieu de mener la transversale parallt au plan
on la mène parallèle au plan I, on a alors : droi

$$\frac{\iota\vartheta}{\iota\alpha} = 1, \quad \frac{\iota\vartheta}{\iota\beta} = 1, \dots$$

$$\mu\alpha + \mu\beta + \mu\gamma + \dots = n.\mu\vartheta$$

Le point ϑ est alors le centre des moyennes distan
des points $\alpha, \beta, \gamma \dots$ (ι étant à l'infini
a, b, c....

– Étant donnés plusieurs points sur une droite, et le c
des moyennes distances m, si l'on fait la figure corrélat
aura les plans correspondants A, B, C.... et M ; le poin
une transversale qcque perce le plan M sera le centre des
harmoniques des points où elle perce les autres plans p
au point où elle perce le plan qui correspond au point
sur la droite am

– Étant donnés plusieurs points sur une droite ($\alpha, \beta, \gamma \dots$) e
centre des moy. harmoniques (ϑ) par rapp. à un point o
droite : si l'on fait la figure corrélative, on aura les plans
pondants A, B, C, ... G, D ; le point où une transversale
perce le plan G sera le centre des moyennes harm. des points
perce les autres plans par rapp. à celui où elle perce le plan

Si par ~~le centre des moy. distances g de~~ plusieurs points a, b, c.... situés d'une manière quelconque dans l'espace ~~on mène des~~ et par leur centre des moy. dist. g on mène des plans parallèles, une transversale qcque rencontre les premiers en des points dont le centre des moyennes distances se trouve sur le dernier.

Propriété corrélative du ~~centre~~ plan des moy harmoniques : Soient plusieurs plans situés d'une manière qcque ds l'espace, si on leur mène par un point fixe une transversale qcque le centre des moy. harmoniques des points où elle perce ces plans se trouve dans un plan fixe.

Ce plan est le plan des moyennes harmoniques des plans donnés par rapport au point fixe (Poncelet)

Transformation de cette propriété par le principe de dualité : Étant donné un système de points a, b, c... ds l'espace et un plan I ; si par une droite qcque de ce plan on mène des plans passant par tous ces points, qu'on mène une transversale qcque et qu'on prenne le centre des moy harmoniques des points où elle perce ces plans par rapp à celui où elle perce le plan I, le plan mené par ce centre et par la droite du plan I passe par un point fixe.

Ce point est le centre des moyennes harmoniques des points donnés par rapport au plan I. (Poncelet)

Si le plan I est à l'infini, le point fixe sera le centre des moyennes distances des points donnés.

Double génération de l'hyperboloïde à une nappe
Étant donné un quadrilatère gauche $aa'b'b$, si l'on m[ène]
une droite mobile mm' qui divise les côtés opposés [ab]
$a'b'$, proportionnellement $\dfrac{ma}{mb} = \dfrac{m'a'}{m'b'}$
La droite mm' sera dans un plan parallèle à aa', [bb']
et elle s'appuiera constamment sur toute droite qui
rencontre les côtés aa', bb' et se trouve ds un plan parallèle à [ab]

Propriété corrélative :
Étant donnés 3 plans A, B, I passant par une même [droite]
et 3 autres plans A', B', I' passant par une seconde d[roite]
si autour de ces 2 droites on fait tourner 2 plans M, [M']
de manière que le rapport anharmonique des 4 plans A, B, [I, M]
soit égal au rapport anharmonique des 4 plans A', B', [I', M']
la droite d'intersection des 2 plans M, M' s'appuiera con[stamment]
sur toute transversale qui rencontre les 3 droites d'inters[ection]
des plans A et A', B et B', I et I'.
(Propriété analogue à la propriété anharmonique des p[oints]
d'une conique.)
De la relation : $\dfrac{\sin MA}{\sin MB} : \dfrac{\sin M'A'}{\sin M'B'} = \dfrac{\sin IA}{\sin IB} : \dfrac{\sin I'A'}{\sin I'B'}$
on conclut :
Le lieu d'un point dont le rapport des distances à [deux]
plans A et B est proportionnel au rapport de ses dist[ances]
à deux autres plans A', B', est un hyperboloïde à une [nappe]

Passage des coordonnées ponctuelles aux coordonnées tangentielles

Soit : $F(x, y, z) = 0$ l'éq. d'une surface d'ordre n en coordonnées cartésiennes.
La figure corrélative sera une surface de classe n.
Aux 3 axes ox, oy, oz correspondent 3 droites dans un plan O : soit ABC le triangle formé par ces droites, dont les sommets correspondent aux 3 plans yz, zx et xy.
Aux 3 plans menés par un point m de la 1e surface parallèlt aux 3 plans coordonnés, correspondent les 3 points ξ, η, ζ où le plan tangent ~~en~~ M à la 2e surface coupe les 3 droites iA, iB, iC, i étant le point correspondant à l'infini de la 1e figure. Aux points x, y, z correspondent les plans X, Y, Z menés par les 3 côtés du triangle ABC et par les 3 points ξ, η, ζ respectivement opposés à ces côtés.
Soient 3 points fixes d, e, f sur les 3 axes ox, oy, oz ; soient D, E, F les 3 plans fixes correspondants, passant par les 3 côtés du triangle ABC. Les plans iBC, iCA, iAB correspondent aux 3 points à l'infini sur ox, oy, oz : On a :

$$\frac{ox}{od} = \frac{\sin O, X}{\sin O, D} : \frac{\sin iBC, X}{\sin iBC, D} = \frac{A\xi}{A\delta} : \frac{i\xi}{i\delta} = \frac{A\xi}{i\xi} : \frac{A\delta}{i\delta}$$

$$\frac{oy}{oe} = \frac{\sin O, Y}{\sin O, E} : \frac{\sin iCA, Y}{\sin iCA, E} = \frac{B\eta}{B\varepsilon} : \frac{i\eta}{i\varepsilon} = \frac{B\eta}{i\eta} : \frac{B\varepsilon}{i\varepsilon}$$

$$\frac{oz}{of} = \frac{\sin O, Z}{\sin O, F} : \frac{\sin iAB, Z}{\sin iAB, F} = \frac{C\zeta}{C\varphi} : \frac{i\zeta}{i\varphi} = \frac{C\zeta}{i\zeta} : \frac{C\varphi}{i\varphi}$$

$\delta, \varepsilon, \varphi$ étant les points où les plans D, E, F rencontrent respectivt les axes iA, iB, iC.

En substituant dans l'équation de la surface, on aura équation de degré n où les rapports variables $\frac{A\xi}{i\xi}$, $\frac{B\eta}{i\eta}$ joueront le rôle de coordonnées homogènes du plan tang. à la surface de classe n.

Si le point i est à l'infini, on a simplement :

$$F(A\xi, B\eta, C\zeta) = 0$$

Les 3 axes Ai, Bi, Ci sont parallèles entre eux.

Si au contraire, le point i étant à distance finie, les points A, B, C sont à l'infini (le tétraèdre se réduit au trièdre $iABC$) on a : $F\left(\frac{1}{i\xi}, \frac{1}{i\eta}, \frac{1}{i\zeta}\right) = 0$

Concevons le plan qui passe par les 3 points ξ, η, ζ soient $\rho, \rho', \rho'', \rho'''$ ses distances aux 4 sommets du tétraèdre, on a : $\frac{A\xi}{i\xi} = \frac{\rho'}{\rho}$ $\frac{B\eta}{i\eta} = \frac{\rho''}{\rho}$ $\frac{C\zeta}{i\zeta} = \frac{\rho'''}{\rho}$

L'équation tangentielle de la surface sera alors :

$$F\left(\frac{\rho'}{\rho}, \frac{\rho''}{\rho}, \frac{\rho'''}{\rho}\right) = 0$$

équation homogène de degré n entre $\rho, \rho', \rho'', \rho'''$.

Nouveau système de géométrie analytique

Soit : $F(\xi, \eta, \zeta)$ l'éq. tangentielle de la surf., ξ_1, η_1, ζ_1 les coordonnées d'un de ses plans tang.

L'équation du point de contact sera :

$$\frac{\partial F}{\partial \xi_1}(\xi - \xi_1) + \frac{\partial F}{\partial \eta_1}(\eta - \eta_1) + \frac{\partial F}{\partial \zeta_1}(\zeta - \zeta_1) = 0$$

Pour avoir l'intersection de la surface par un plan (α) on joindra l'équation de condition suivante :

$$\frac{\partial F}{\partial \xi_1}(\alpha - \xi_1) + \frac{\partial F}{\partial \eta_1}(\beta - \eta_1) + \frac{\partial F}{\partial \zeta_1}(\gamma - \zeta_1) = 0$$

Cette éq. jointe à celle de la surface, représente la développa

circonscrite à la surface suivant son intersection avec le plan $(\alpha\beta\gamma)$
— Dans deux figures corrélatives, à un même point de l'espace considéré successivement comme appartenant à l'une et à l'autre, correspondent en général deux plans différents.

Théorème. Étant donné une figure dans l'espace et ~~un~~ deux tétraèdres qconques, A, B, C, D étant les faces du premier, et a, b, c, d les sommets du second; si à chaque point m de la figure, dont les distances aux 4 plans A, B, C, D sont r, r', r'', r''', on fait correspondre un plan M dont les distances $\rho, \rho', \rho'', \rho'''$ aux 4 sommets a, b, c, d vérifient les relations (constantes) :
$$\frac{\rho'}{\rho} = \lambda\frac{r'}{r}, \quad \frac{\rho''}{\rho} = \mu\frac{r''}{r}, \quad \frac{\rho'''}{\rho} = \nu\frac{r'''}{r},$$
le plan M enveloppera ~~la~~ une figure corrélative de la proposée.

Corollaire. Soient 2 tétraèdres $SABC$, $S'A'B'C'$. Si par chaque point d'un plan qcque fixe on mène 3 plans par les 3 côtés du triangle ABC, qui coupent les arêtes opposées aux points α, β, γ; puis qu'on mène un plan qui coupe les 3 arêtes $S'A'$, $S'B'$, $S'C'$ du second tétraèdre en 3 points α', β', γ' tels qu'on ait :
$$\frac{\alpha'A'}{\alpha'S'} = \lambda\frac{\alpha S}{\alpha A}, \quad \frac{\beta'B'}{\beta'S'} = \mu\frac{\beta S}{\beta B}, \quad \frac{\gamma'C'}{\gamma'S'} = \nu\frac{\gamma S}{\gamma C}$$
le plan déterminé par les 3 points $\alpha' \beta' \gamma'$ passera toujours par un point fixe (correspondant au plan fixe donné)
De ce théorème, qui est ici un corollaire du principe de dualité, on pourrait déduire toute la théorie des figures corrélatives et le principe de dualité lui-même

Si la face (base) ABC du 1er tétraèdre est à l'infini, on a

$$\alpha S = \lambda \frac{\alpha' A'}{\alpha' S'} \qquad \beta S = \mu \frac{\beta' B'}{\beta' S'} \qquad \gamma S = \nu \frac{\gamma' C'}{\gamma' S'}$$

Si le sommet S' du 2e tétraèdre est aussi à l'infini, on

$$\alpha S = \lambda . \alpha' A' \qquad \beta S = \mu . \beta' B' \qquad \gamma S = \nu . \gamma' C'$$

Transformation particulière, dans laquelle le point corresp[ondant] à l'infini est lui-même à l'infini : c'est ce qui a li[eu] dans la transformation parabolique, dans la transformati[on] par mouvement infiniment petit, ou par un système d[e]

Si les 2 bases ABC, A'B'C' sont à l'infini, il vient

$$\alpha S = \frac{\lambda}{\alpha' S'} \ , \qquad \beta S = \frac{\mu}{\beta' S'} \ , \qquad \gamma S = \frac{\nu}{\gamma' S'}$$

Si les 2 sommets S et S' sont à l'infini, il vient

$$\alpha A = \frac{\lambda}{\alpha' A'} \ , \qquad \beta B = \frac{\mu}{\beta' B'} \ , \qquad \gamma C = \frac{\nu}{\gamma' C'}$$

Théorie des polaires réciproques.

Si l'on circonscrit à une surface du 2e degré un cône ayant pour sommet un point donné ($x_1 y_1 z_1$) le plan de la courbe de contact, dont l'équation contient $x_1 y_1 z_1$ au 1er degré, enveloppe une figure corrélative de celle que décrit le sommet du cône circonscrit.

Si le sommet du cône prend les positions a, b, c, d en ligne droite, le plan de contact prendra les positions A, B, C, D, telles qu'on aura toujours:

$$\frac{\sin CA}{\sin CB} : \frac{\sin DA}{\sin DB} = \frac{ca}{cb} : \frac{da}{db}.$$

Le sommet du cône est le pôle du plan, qui est appelé le plan polaire du sommet.

Quand le plan polaire d'un point passe par un 2e point, réciproquement le plan polaire de ce 2e point passe par le 1er. D'où réciprocité de la transformation, et le nom de figures polaires réciproques.

La relation anharmonique représente toutes les relations transformables par les polaires réciproques; elle résume toutes les relations projectives.

~~Theorie~~

75

Transformation par mouvement infiniment petit (1)

Quand un corps solide éprouve un déplacement infin[iment]
petit, les plans normaux aux trajectoires de tous ses poi[nts]
enveloppent une figure corrélative de la figure de ce corps.

Caractère particulier de cette transformation : cha[que]
plan passe par le point correspondant (point direct[eur]).

De plus, il existe un axe X qui se déplace ds sa dir[ection].
les plans normaux aux trajectoires de 2 points qcqus
rencontrent cet axe en 2 points α, β qui sont les [pieds]
des perpendiculaires abaissées des points a, b sur ...
de sorte qu'on a : $\alpha b = ab.\cos(ab, X)$

Telle est la relation métrique entre les 2 figures corrél[atives].

— Soient dans l'espace 2 figures égales situées de m[anière]
quelconque ; si l'on joint par des droites les points homol[ogues]
des 2 figures, et qu'on mène par le milieu de chaque [droite]
le plan normal à cette droite, tous ces plans envelop[pent]
une figure corrélative des 2 proposées, et corrélative [de la]
figure formée par les milieux de toutes ces droites.

(1) Corollaire : Si l'on coupe la surface d'une vis par un [plan]
et que par chaque point de la section on mène le plan no[rmal]
à l'hélice qui passe par ce point, tous ces plans normaux
passent par un même point, situé dans le plan sécant.

214

Transformation par la considération d'un système de forces.

Un système de forces équivaut à 2 forces F, F'; si l'on se donne la direction de l'une, on les détermine entièrement toutes deux. Si l'on prend le plan du moment principal des forces par rapport à un point de F, il passera par F'. Si l'on fait tourner F autour de ce point fixe, F' reste dans le plan du moment principal relatif à ce point (fixe) — D'où dualité — (et réciproquement)

Si l'on conçoit dans l'espace un système de forces et qu'on prenne les plans des moments ~~principaux~~ principaux relatifs à tous les points d'une figure, ces plans envelopperont une figure corrélative.

Le segment intercepté sur l'axe central des moments par deux plans focaux de l'une ~~des figures~~ des figures est égal à la projection orthogonale sur cet axe de la droite qui joint les 2 points correspondants de l'autre figure.

Telle est la relation métrique entre les 2 figures corrélatives.

Les 3 modes de transformation précédents jouissent de la propriété de réciprocité.

Condition pour qu'il y ait réciprocité entre deux figu
corrélatives:

— Théorème: Quand l'équation d'un plan mobile co
au 1er degré les coordonnées x_1, y_1, z_1 d'un point dire
si l'on échange les coordonnées courantes x, y, z a
coordonnées x_1, y_1, z_1, on obtient un second plan mob
correspondant au même point directeur. Si le point d
parcourt la surface A, le 1er plan mobile enveloppe la s
et si le point directeur parcourt la surface A', le 2e plan
enveloppe la surface A.

Pour qu'il y ait réciprocité, il ~~faut et il~~ suffit qu
plans se confondent, c.à.d. que l'équation du plan ne
pas quand on y échange x, y, z en x_1, y_1, z_1, et

Il faut et il suffit que l'équation du plan mobile
symétrique par rapport aux coordonnées courantes
à celles du point directeur.

Quand l'équation d'un plan mobile est symétrique
rapport aux coordonnées courantes et à celles du point
elle ne peut avoir que deux formes différentes: ou bien
mobile peut être considéré comme le plan polaire du
directeur par rapport à une surface déterminée du 2e
ou bien il peut être considéré comme le plan norma
trajectoire du point directeur dans un mouvement i
petit de la figure à laquelle ce point appartient.

Seconde partie. Principe de homographie

1re partie: Une figure quelconque étant donnée dans l'espace on peut former, d'une infinité de manières, une seconde figure du même genre et jouissant des mêmes propriétés descriptives que la première, c à d qu'à chaque point, droite ou plan de la première correspond, dans la seconde, un point, une droite ou un plan.

Aux points à l'infini de la 1e figure correspond un plan, de sorte qu'à des faisceaux de droites parallèles, de la 1e figure, correspondront des faisceaux de droites concourant en ce plan.

2e partie: Le rapport anharmonique de 4 points ~~de la~~ d'une ligne droite de la 1e figure est égal au rapport anharmonique des 4 points homologues de la 2e figure; et le rapport anharmonique de 4 plans passant par une même droite de la 1e figure est égal au rapport anharmonique des 4 plans homologues de la 2e fig.

Pour démontrer ce principe, il suffit de concevoir une figure A' corrélative de la proposée A, en vertu du principe de dualité; puis une figure A" corrélative de la figure A'. Les deux figures A et A" seront homographiques.

Dans deux figures homographiques, le rapport des distances d'un plan qcque de la 1e à 2 points fixes est proportionnel au rapport des distances du plan homologue aux 2 points fixes qui correspondent à ceux de la 1e figure de la 2e figure.

Et le rapport des distances d'un point qcque de la 1e à 2 plans fixes est proportionnel au rapport des distances du point homologue aux 2 plans fixes homologues.

Dans deux figures homographiques, la distance d'un point quelconque de la 1re à un plan fixe est proportion au rapport des distances du point homologue au plan homologue du plan fixe et au plan homologue de l'

La distance d'un point qcque de la 1e fig. au p homologue de l'infini de la 2e, est en raison inverse la distance du point homologue de la 2e fig. au plan homologue de l'infini de la 1e.

Deux figures sont homographiques, dès qu'à chaque point et à chaque plan de l'une correspondent respectivement point et un plan de l'autre : et la relation anharm résulte immédiatement de cette propriété.

On peut faire correspondre d'une infinité de manièr points d'une figure aux points d'une autre ; mais p qu'elles soient homographiques, il faut de plus qu'au points d'un même plan correspondent les points d'un même plan.

Pôles et plans polaires dans les surfaces du second degré

Si l'on transforme par homographie la figure formée par une quadrique à centre C, un diamètre AB et les 2 plans tangents aux points A et B, on obtient la propriété suivante: (parallèles)

Si autour d'un point fixe on fait tourner une transversale qcq. et qu'on mène les 2 plans tangents à la quadrique aux points où cette transversale la perce, 1° ces deux plans se couperont sur un plan fixe; 2° le point où ce plan fixe rencontrera la transversale sera le conjugué harmonique du point fixe par rapport aux 2 points où la transversale perce la surface

$$\frac{C'A'}{C'B'} : \frac{D'A'}{D'B'} = \frac{CA}{CB} = -1$$

Le plan fixe est l'homologue de l'infini de la 1re figure; ~~il~~ il s'appelle plan polaire du point fixe C, qui est l'homologue du ~~point à l'infini du diamètre AB~~ centre C; et ce point s'appelle le pôle du plan fixe. (Le point D' est l'homologue du point à l'infini sur AB.)

La relation harmonique étant réciproque, le plan polaire d'un point qcq d'un plan passe par le pôle de ce plan.

D'où réciprocité entre les pôles et plans polaires, et entre les droites polaires. Tout diamètre de la surface a sa polaire à l'infini.

Soient 3 diamètres conjugués d'une quadrique Σ: la polaire de chacun d'eux est à l'infini dans le plan des 2 autres. A ces diamètres correspondent dans la quadrique homographique Σ', 3 cordes passant par le point C' homologue du centre C de Σ; la polaire de chacune d'elles sera dans le plan des 2 autres, et dans le plan polaire de C'. Ces 3 droites sont donc telles que la polaire de chacune d'elles passe par le point de concours des 2 autres. Elles forment un système d'axes conjugués relatif au point C'.

On peut aussi obtenir les axes conjugués relatifs à un p
par le principe de dualité.

Considérons 3 diamètres conjugués d'une quadrique
les plans tangents aux extrémités de chacun d'eux sont
parallèles au plan des 2 autres. Transformons par dua
au centre o correspond un plan O, dont le pôle par ra
à la surface transformée Σ' est le point i correspondant
l'infini de la 1re fig. Aux 3 diam. conjugués correspon
3 droites du plan O, et telles, que la polaire de chacune
passe par le point d'intersection des 2 autres (ces 3 polai
concourent d'ailleurs en i.) Aux extrémités des 3 diamètres conjug
correspondent les plans tangents menés par les 3 droites co
pondantes, et les points de ~~contact~~ à Σ' de ces plans tangents c
pondent aux plans tangents menés à Σ par les extrémités
diamètres conjugués. — Les 3 droites ~~du plan~~ concourant au point
forment un système d'axes conjugués relatif à ce poi

Propriété générale des axes conjugués, obtenue par le principe de dualité.

Soit un segment fixe om; ox_1, oy_1, oz_1 ses projections sur 3 axes rectangulaires ox, oy, oz (mobiles autour de O)

$$ox_1^2 + oy_1^2 + oz_1^2 = om^2 = C^{te}.$$

Soit une sphère de centre o, coupant les 3 axes en a_1 b_1 c_1; on peut écrire:

$$\frac{ox_1^2}{oa_1^2} + \frac{oy_1^2}{ob_1^2} + \frac{oz_1^2}{oc_1^2} = C^{te}.$$

Transformons la figure par dualité. On aura une surface du 2e degré; 3 droites X, Y, Z dans un plan O, telles que la polaire de chacune d'elles passe par le point de rencontre des 2 autres. Ces 3 polaires X', Y', Z' concourent au point i correspondant à l'infini: ce sont 3 axes (ia, ib, ic) conjugués relatifs à ce point. On aura dans le plan O une droite correspondant à om; un plan qqe M passant par cette droite correspondra au point m. Aux 3 plans menés par m perp. aux axes ox, oy, oz correspondent les 3 points où le plan M coupe les 3 axes conjugués X', Y', Z': Soient x, y, z ces 3 points. Aux 4 points o, x_1, a_1, et l'infini sur l'axe ox correspondent 4 plans passant par X: le plan O, le plan du point x, le plan tangent à la surface en a et le plan du point i. On a donc la relation anharmonique:

$$\frac{ox_1}{oa_1} = \frac{\alpha x}{\alpha a} : \frac{ix}{ia} \qquad \frac{oy_1}{ob_1} = \frac{\beta y}{\beta b} : \frac{iy}{ib} \qquad \frac{oz_1}{oc_1} = \frac{\gamma z}{\gamma c} : \frac{iz}{ic}$$

D'où le théorème: Étant donnés une quadrique et un plan transversal M; si autour d'un point qqe i on fait tourner 3 axes conjugués, et qu'on désigne par α, β, γ les points où ils rencontrent le plan polaire de i; a, b, c, 3 des six points où ils rencontrent la surface; x, y, z les 3 points où ils rencontrent le plan transversal, on aura la relation:

$$\left(\frac{ia}{\alpha a}:\frac{ix}{\alpha x}\right)^2+\left(\frac{ib}{\beta b}:\frac{iy}{\beta y}\right)^2+\left(\frac{ic}{\gamma c}:\frac{iz}{\gamma z}\right)^2=C^{te}$$

Si le plan transversal M est parallèle au plan polaire (O), on a :
$$\frac{ix}{\alpha x}=\frac{iy}{\beta y}=\frac{iz}{\gamma z}=C^{te}$$
d'où :
$$\left(\frac{ia}{\alpha a}\right)^2+\left(\frac{ib}{\beta b}\right)^2+\left(\frac{ic}{\gamma c}\right)^2=C^{te}$$

Si le plan O est à l'infini, c.à.d. si le point i est centre de la quadrique, les 3 axes conjugués ia, ib, deviennent 3 diamètres conjugués. On a :
$$\frac{\alpha x}{\alpha a}=\frac{\beta y}{\beta b}=\frac{\gamma z}{\gamma c}=1 \quad ; \quad \text{d'où :}$$
$$\left(\frac{ix}{ia}\right)^2+\left(\frac{iy}{ib}\right)^2+\left(\frac{iz}{ic}\right)^2=C^{te}$$

Démonstration directe de la relation anharmonique entre pôles en ligne droite et leurs 4 plans polaires :
$$\frac{\sin CA}{\sin CB}:\frac{\sin DA}{\sin DB}=\frac{ca}{cb}:\frac{da}{db}$$
Soient $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ les points où la droite $abcd$ rencontre les plans A, B, C, D. Il suffit de prouver : $\frac{\gamma\alpha}{\gamma\beta}:\frac{\delta\alpha}{\delta\beta}=$
Or le point a étant le pôle du plan A, les points a et α sont conjugués harmoniques par rapport aux 2 points où la droite $abcd$ rencontre la quadrique ; de même b et β, c et γ, d et δ sont conjugués harmoniques par rapport aux 2 mêmes points. Ces systèmes de points sont donc en involution, et le rapport anharmonique de ... est égal au rapport anharmonique des 4 points correspondants.

Corollaire : Étant donnés 2 points fixes a, b, et leurs plans polaires A, B par rapp. à une quadrique, si l'on mène un plan M et qu'on prenne son pôle m, le rapport des distances du plan M aux points a et b est prop. au rapp. des distances du point m aux plans

Propriété générale d'un système de 3 axes conjugués, obtenue par le principe de l'homographie

Considérons 3 diamètres conjugués d'une quadrique, AA', BB', CC', et un point fixe O qcque: on sait qu'on a, quel que soit le système de diam. conjugués:

$$\overline{OA}^2+\overline{OA'}^2+\overline{OB}^2+\overline{OB'}^2+\overline{OC}^2+\overline{OC'}^2=C^{te}$$

Concevons une sphère de centre O; soient a, a', b, b', c, c' les points où elle coupe les 6 demi-droites issues de ce point; on peut écrire:

$$\left(\frac{OA}{Oa}\right)^2+\left(\frac{OA'}{Oa'}\right)^2+\left(\frac{OB}{Ob}\right)^2+\left(\frac{OB'}{Ob'}\right)^2+\left(\frac{OC}{Oc}\right)^2+\left(\frac{OC'}{Oc'}\right)^2=C^{te}.$$

Faisons la figure homographique en conservant les mêmes lettres. Soient L, L', M, M', N, N' les points où les 6 droites issues de O percent le plan qui correspond à l'infini de la 1re fig; ce plan a pour pôles le point homologue du centre de la 1re quadrique, parrapp aux nouvelles quadriques, et le point homologue du ~~point~~ centre O de la sphère primitive.
D'où le théorème suivant: $\left[\frac{OA}{Oa}\text{ devient: }\frac{OA}{Oa}:\frac{LA}{La}\right]$

Étant données 2 quadriques fixes et un plan fixe; si par le pôle de ce plan par rapport à la 1re surface on mène un système ~~[illegible]~~ de 3 diamètres conjugués, AA', BB', CC'; et si par le pôle de ce plan par rapport à la 2e surface on mène 6 rayons aux points A, A', B, B', C, C', qui rencontrent cette 2e surface aux points a, a', b, b', c, c', et le plan fixe aux points L, L', M, M', N, N'; on aura la relation:

$$\left(\frac{OA}{Oa}:\frac{LA}{La}\right)^2+\left(\frac{OA'}{Oa'}:\frac{L'A'}{L'a'}\right)^2+\dots+\left(\frac{OC}{Oc}:\frac{NC}{Nc}\right)^2+\left(\frac{OC'}{Oc'}:\frac{N'C'}{N'c'}\right)^2=C^{te}$$

Transformation du centre des moyennes distances en centre des moyennes harmoniques (par homographie)

~~Étant donnés~~ n points $a, b, c, \ldots$ ~~en ligne droite~~, g leur centre des moyennes distances, ~~m~~ un ~~point~~ qcq de la droite, on a :

$$ma + mb + mc + \ldots = n.\,mg$$

ou $$\frac{ma}{mg} + \frac{mb}{mg} + \frac{mc}{mg} + \ldots = n$$

Dans la figure homographique soient $a', b', c', \ldots g', m'$ les points correspondants, et i' le point correspondant à l'infini sur la droite $abc\ldots$ On a : $$\frac{ma}{mg} = \frac{m'a'}{m'g'} : \frac{i'a'}{i'g'} \quad \text{etc.}$$

D'où : $$\frac{m'a'}{i'a'} + \frac{m'b'}{i'b'} + \frac{m'c'}{i'c'} + \ldots = n.\,\frac{m'g'}{i'g'}$$

Le point m' est arbitraire comme m. S'il est à l'infini :

$$\frac{1}{i'a'} + \frac{1}{i'b'} + \frac{1}{i'c'} + \ldots = \frac{n}{i'g'}$$

Le point g' est le centre des moyennes harmoniques de $a', b', c', \ldots$ par rapport au point i'.

Si au contraire i' est à l'infini, il vient :

$$m'a' + m'b' + m'c' + \ldots = n.\,m'g'$$

Le point g' est le centre des moyennes distances des p. $a', b', c', \ldots$

Si m' vient coïncider avec g' (dans le cas général) on a :

$$\frac{g'a'}{i'a'} + \frac{g'b'}{i'b'} + \frac{g'c'}{i'c'} + \ldots = 0$$

propriété qui caractérise le centre des moy. harmoniques g'.

Cf. Mémoire sur les centres des moyennes harmoniques de Poncelet ap. Crelle 1828.

Si l'on transforme par homographie un système de poin[ts]
un plan et leur centre des moyennes distances (tel que
tième des parallèles par ces points et leur centre, une trans
qcq qui rencontre les premières en des points dont le c
des moy. dist. se trouve sur la dernière) on obtient
système de points dans un plan et leur centre des m
harmoniques par rapport à une droite fixe (qui corresp
l'infini du premier plan.)

Propriété du centre des moyennes harmoniques ds un
Étant donnés dans un plan un système de points et une
si par un point qcq de cette droite on mène des
à tous ces points, et un dernier rayon au centre des moy
des points où les autres rayons rencontrent une transv
relatif au point où cette transversale rencontre la droite
ce dernier rayon passe par un point fixe, qui est le
des moy. harm. des points donnés par rapp. à la droite

Si l'on transforme par homographie un système de points
l'espace et leur centre des moyennes distances, on obtient
système de points et leur centre des moyennes harmoni
par rapport à un plan fixe (qui correspond à l'infini de

Propriétés du centre des moyennes harmoniques ds l'es
Étant donnés un plan et un système de points dans l'es
1° si d'un point qcq de ce plan on mène des rayons à tous
et un dernier rayon au centre des moy. harm. des points
autres rayons percent un plan transversal qcq, relatif à
d'intersection de ce plan transversal avec le plan fixe, ce d
rayon passe par un point fixe, qui est le centre des m
harmoniques des points donnés par rapport au plan do
2° si ~~par une~~ droite qcq de ce plan on mène des plans par
et qu'on prenne le centre des moyennes harmoniques des p
une transversale qcq rencontre ces plans par rapport au

elle rencontre le plan donné; le plan mené par la droite et par le centre passera par le centre des moy. harm. des points donnés par rapport au plan donné.

Le centre des moyennes distances d'un système de points dans l'espace est tel, que sa distance à un plan qcque est la moyenne des distances de tous les points au même plan

Transformons cette propriété par homographie: Théorème: Le centre des moyennes harmoniques d'un système de (n) points dans l'espace par rapport à un plan donné est tel, que la somme des distances de tous ces points à un plan transversal qcque, divisées respectivement par leurs distances au plan donné, est égale à n fois la distance des centre au plan transversal, divisée par sa distance au plan donné.

Soit π le plan transversal, I le plan donné (correspondant à l'infini de la 1e fig.) on a ($a, b, c, \dots$ points donnés; g leur centre):

$$\frac{a\pi}{ai} + \frac{b\pi}{bi} + \frac{c\pi}{ci} + \dots\dots = n.\frac{g\pi}{gi}$$

Le centre des moyennes harmoniques d'un système de points par rapport à un plan donné est le centre de gravité de ces points, supposés matériels et doués de masses inversement proportionnelles à leurs distances au plan donné.

Le centre des moyennes harmoniques devient ainsi un cas particulier du centre de gravité, c.à.d. du centre des moyennes distances.

Le centre des moyennes harmoniques d'un système de points par rapport à un plan donné est encore le centre des forces parallèles appliquées en ces points et inversement proportionnelles à leurs distances au plan donné (Cauchy.)

Si le plan transversal π est à l'infini, on a simplement:

$$\frac{1}{ai} + \frac{1}{bi} + \frac{1}{ci} + \dots\dots = \frac{n}{gi}$$ (par rapp au plan fixe I.)

Corollaire (en supposant le plan transversal Π parallèle au plan

Si d'un point qqcque de l'espace on mène des rayons à
points et à leur centre des moy. harmoniques par rapport
plan fixe, et qu'on prenne le rapport de chaque rayon au
compris entre le point auquel ce rayon aboutit et celui
perce le plan fixe ; le rapport relatif au centre des moy.
sera la moyenne arithmétique de tous les autres rapports.

Généralisation du système des coordonnées cartésiennes.

L'équation d'une surface d'ordre $\underline{n}$ en coord. cartésiennes est : $F(x, y, z) = 0$ F du degré $\underline{n}$

La figure homographique est une surface d'ordre $\underline{n}$

Aux 3 axes ox, oy, oz correspondent 3 axes OX, OY, OZ : au plan de l'infini correspond un plan qui rencontre les 3 axes en A, B, C : ces 3 points correspondent aux points à l'infini sur ox, oy, oz. Prenons 3 points fixes d, e, f respectivement sur ox, oy, oz ; soient D, E, F les points correspondants qcques sur OX, OY, OZ.

On a :

$$\frac{ox}{od} = \frac{OX}{OD} : \frac{AX}{AD} = \frac{OX}{AX} : \frac{OD}{AD}$$

$$\frac{oy}{oe} = \frac{OY}{OE} : \frac{BY}{BE} = \frac{OY}{BY} : \frac{OE}{BE}$$

$$\frac{oz}{of} = \frac{OZ}{OF} : \frac{CZ}{CF} = \frac{OZ}{CZ} : \frac{OF}{CF}$$

L'équation de la surface homographique sera :

$$F\left(\frac{OX}{AX} : \frac{OD}{AD}, \frac{OY}{BY} : \frac{OE}{BE}, \frac{OZ}{CZ} : \frac{OF}{CF}\right) = 0$$

ou simplement : $$F\left(\frac{OX}{AX}, \frac{OY}{BY}, \frac{OZ}{CZ}\right) = 0$$

les rapports $\frac{OD}{AD}$, $\frac{OE}{BE}$, $\frac{OF}{CF}$ étant des constantes qui rentrent dans les coefficients.

C'est l'équation de la surface en <u>coordonnées ponctuelles homogènes</u>.

Aux 4 points O, X, A, D sur l'axe OX on peut substituer les 4 points où une transversale qcque rencontre les 4 plans OBC, XBC, ABC, DBC, soient α, X', A', D' ; de même on peut remplacer les axes OY et OZ par les transversales qcques $\beta Y'B'E'$, $\gamma Z'C'F'$; l'équation de la surface d'ordre $\underline{n}$ sera :

$$F\left(\frac{\alpha X'}{A'X'}, \frac{\beta Y'}{B'Y'}, \frac{\gamma Z'}{C'Z'}\right) = 0$$ très générale :

la surface est rapportée au triangle ABC et à 3 axes qcques $\alpha A'$, $\beta B'$, $\gamma C'$.

Si les points A', B', C' sont à l'infini, l'équation devie

$$F(\alpha X', \beta Y', \gamma Z') = 0$$

éq. de la surface rapportée à un triangle ABC et à 3 axes parallèles αX, βY, γZ (parallèles au plan du triangle)

Si les points α, β, γ sont à l'infini, l'équation devie

$$F\left(\frac{1}{A'X'}, \frac{1}{B'Y'}, \frac{1}{C'Z'}\right) = 0$$

éq. d'une surface rapportée à un triangle ABC et à 3 ax qcques passant par 3 points qcques A', B', C' du plan du

Si le triangle ABC est à l'infini, l'équation devien

$$F(\alpha X', \beta Y', \gamma Z') = 0$$

éq. d'une surface dont chaque point est projeté sur 3 fixes qcques parallèlement à 3 plans fixes qcques

En particulier : si l'on suppose que les 3 axes sont issu même point et que les 3 plans sont les 3 plans déterm par ces axes 2 à 2, on retrouve les coordonnées rectiligne

On peut confondre 2 ou 3 axes, et 2 ou 3 origines l'axe multiple

On peut aussi confondre les points A', B', C', les 3 axes dist distincts. Le trièdre des axes a son sommet ds le plan

On peut enfin, dans l'équation : $F\left(\frac{OX}{AX}, \frac{OY}{BY}, \frac{OZ}{CZ}\right)$ remplacer les rapports des coordonnées tétraédriques par rapports des distances du point aux 4 faces du tétraèdre OABC : l'éq. de la surface devient :

$$F\left(\frac{r'}{r}, \frac{r''}{r}, \frac{r'''}{r}\right) = 0.$$

éq homogène en r, r', r'', r''' et du degré $\underline{n}$

230

Considérons un point m, dont les projections sur les 3 axes parallèlement aux plans coordonnés sont x, y, z. Menons par les points m, x, y, z 4 plans parallèles (qcques), et par l'origine un axe fixe ok : cet axe rencontre les 4 plans en 4 points μ, a, b, c tels qu'on a : $oa + ob + oc = o\mu$

ou

$$\frac{oa}{o\mu} + \frac{ob}{o\mu} + \frac{oc}{o\mu} = 1.$$

Si l'on transforme la figure par homographie, on obtient le plan ABC homologue de l'infini ; ~~les~~ 3 plans menés par M (homologue de m) et les 3 côtés du tr. ABC, qui rencontrent les axes OA, OB, OC en X, Y, Z. Si par une droite qcque du plan ABC on mène 4 plans passant par M, X, Y, Z, ils rencontreront un axe fixe OK en 4 points $\mu, \alpha, \beta, \gamma$, et l'on aura, en appelant i le point où OK perce le plan ABC :

$$\frac{O\alpha}{O\mu} : \frac{i\alpha}{i\mu} = \frac{oa}{o\mu} \qquad \frac{O\beta}{O\mu} : \frac{i\beta}{i\mu} = \frac{ob}{o\mu} \qquad \frac{O\gamma}{O\mu} : \frac{i\gamma}{i\mu} = \frac{oc}{o\mu}$$

et la relation précédente devient :

$$\frac{O\alpha}{i\alpha} + \frac{O\beta}{i\beta} + \frac{O\gamma}{i\gamma} = \frac{O\mu}{i\mu}$$

Si l'axe OK est parallèle au plan ABC (i à l'infini) on a :

$$O\alpha + O\beta + O\gamma = O\mu.$$

Si la droite prise dans le plan ABC est à l'infini (si les 4 plans sont parallèles à la base du tétraèdre ABC) il vient :

$$\frac{OX}{AX} + \frac{OY}{BY} + \frac{OZ}{CZ} = \frac{OM}{HM}$$

(H étant le point où la droite OM rencontre le plan ABC)

D'où ce théorème : La somme des coordonnées tétraédriques d'un point est égale au rapport de sa distance à l'origine à sa distance au point où la droite qui le joint à l'origine perce le plan de la base.

Si les points A, B, C sont à l'infini, on a un nouveau
de coordonnées rectilignes ; une surface $F(x, y, z\ldots$
devient par la transformation : $F(\lambda x, \mu y, \nu z) = 0$
On peut identifier les 2 systèmes d'axes ; on a alors 2
homographiques rapportées aux mêmes axes.

Construction des figures homographiques.

On peut choisir arbitrairement les 5 points homologues
de 5 points donnés.

Soient a, b, c, d, e les 5 points donnés ; A, B, C, D, E les
homologues. Pour construire l'homologue M d'un autre
point m quelconque, ~~on mènera~~ menons les plans ebc, mbc et les plans
qui rencontrent ad en ε, α
EBC, MBC, qui rencontrent AD en ε', α'. On a la relation

$$\frac{a\alpha}{d\alpha} : \frac{a\varepsilon}{d\varepsilon} = \frac{A\alpha'}{D\alpha'} : \frac{A\varepsilon'}{D\varepsilon'}$$

qui détermine le point α' et par suite le plan MBC. De
même on détermine les plans MCA, MAB ; ces 3 plans déter-
minent le point M.

Pour construire le plan P homologue du plan p, soient
α, β, γ les points où celui-ci rencontre ad, bd, cd ; les
points homologues α', β', γ' sont déterminés par la relation
anharmonique
$$\frac{a\alpha}{d\alpha} : \frac{a\varepsilon}{d\varepsilon} = \frac{A\alpha'}{D\alpha'} : \frac{A\varepsilon'}{D\varepsilon'}$$
et ces 3 points α', β', γ' déterminent le plan P.

— La relation anharmonique peut s'écrire :

$$\frac{a\alpha}{d\alpha} = \frac{A\alpha'}{D\alpha'}\left(\frac{a\varepsilon}{d\varepsilon} : \frac{A\varepsilon'}{D\varepsilon'}\right) = \lambda \frac{A\alpha'}{D\alpha'}$$

De même

$$\frac{b\beta}{d\beta} = \mu \frac{B\beta'}{D\beta'} \qquad \frac{c\gamma}{d\gamma} = \nu \frac{C\gamma'}{D\gamma'}$$

D'où le théorème général suivant :

Étant donnés 2 tétraèdres qcques $abcd$, $ABCD$; si par chaque point d'une figure donnée on mène 3 plans passant par les arêtes bc, ca, ab du 1er tétraèdre, et rencontrant les arêtes opposées en α, β, γ ; et que sur les 3 arêtes AD, BD, CD du 2e tétraèdre on prenne 3 points α', β', γ' déterminés par les relations :

$$\frac{a\alpha}{d\alpha} = \lambda \frac{A\alpha'}{D\alpha'} \qquad \frac{b\beta}{d\beta} = \mu \frac{B\beta'}{D\beta'} \qquad \frac{c\gamma}{d\gamma} = \nu \frac{C\gamma'}{D\gamma'}$$

(où λ, μ, ν sont 3 constantes arbitraires)

le point d'intersection des 3 plans $\alpha'BC$, $\beta'CA$, $\gamma'AB$ décrira une figure homographique à la proposée.

On peut remplacer les coordonnées tétraédriques d'un point par les rapports de ses distances aux 3 faces et à la base du tétraèdre. Soient p, q, r, s les distances du point m aux 4 faces du 1er tétraèdre, p', q', r', s' celles du point M aux 4 faces du 2e tétraèdre ; si l'on a les relations :

$$\frac{p}{s} = \lambda \frac{p'}{s'}, \qquad \frac{q}{s} = \mu \frac{q'}{s'}, \qquad \frac{r}{s} = \nu \frac{r'}{s'}$$

les points M et m ~~décrira~~ décriront deux ~~une~~ figures homographiques.

De même, α, β, γ étant les points où un plan p coupe les 3 arêtes ad, bd, cd du 1er tétraèdre ; α', β', γ' les points où un plan P coupe les 3 arêtes AD, BD, CD du 2e tétraèdre ; on peut remplacer les rapports $\frac{a\alpha}{d\alpha}, \frac{b\beta}{d\beta}, \frac{c\gamma}{d\gamma}, \frac{A\alpha'}{D\alpha'}, \frac{B\beta'}{D\beta'}, \frac{C\gamma'}{D\gamma'}$ par les rapports des distances des 2 plans aux 4 sommets du tétraèdre correspondant ; et si l'on a entre ces distances les mêmes relations que ci-dessus, les plans p et P envelopperont deux figures homographiques.

35

Ainsi les 3 équations $\frac{a\alpha}{d\alpha} = \lambda \frac{A\alpha'}{D\alpha'}$, $\frac{b\beta}{d\beta} = \mu \frac{B\beta'}{D\beta'}$, $\frac{c\gamma}{d\gamma} = \nu \frac{}{D}$

suffisent pour construire les points et les plans d'une figure homographique d'une figure proposée, dans le cas le plus gén

Cas particuliers. Si d est à l'infini, on a simplement

$$a\alpha = \lambda \frac{A\alpha'}{D\alpha'}, \quad b\beta = \mu \frac{B\beta'}{D\beta'}, \quad c\gamma = \nu \frac{C\gamma'}{D\gamma'}$$

(Remarque: ces équations, qui se déduisent rigoureusement d relation générale anharmonique, s'obtiennent en faisant dans les constantes les segments infinis $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$.)

Si d et D sont à l'infini, les formules deviennent

$$a\alpha = \lambda . A\alpha', \quad b\beta = \mu . B\beta', \quad c\gamma = \nu . C\gamma'$$

Si au contraire les bases abc, ABC sont à l'infini, & o

$$d\alpha = \lambda . D\alpha', \quad d\beta = \mu . D\beta', \quad d\gamma = \nu . D\gamma'$$

[Dans cette transformation, la surface $F(x, y, z) = 0$ devient la surface $F(\lambda x, \mu y, \nu z) = 0$. (Voir plus haut

Si d et la base ABC sont à l'infini, on a simplem

$$a\alpha = \frac{\lambda}{D\alpha'}, \quad b\beta = \frac{\mu}{D\beta'}, \quad c\gamma = \frac{\nu}{D\gamma'}$$

Théorèmes. I: Étant donnés un tétraèdre $SABC$ et un arbitraire; si par chaque point M de ce plan on mène les p MBC, MCA, MAB qui coupent les arêtes SA, SB, SC en α Si d'autre part on a un tétraèdre $S'A'B'C'$, et qu'on prenne sur ses arêtes $S'A'$, $S'B'$, $S'C'$ ~~B~~ points α', β', γ' tels qu'on a

$$\frac{A\alpha}{S\alpha} = \lambda \frac{A'\alpha'}{S'\alpha'}, \quad \frac{B\beta}{S\beta} = \mu \frac{B'\beta'}{S'\beta'}, \quad \frac{C\gamma}{S\gamma} = \nu \frac{C'\gamma'}{S'\gamma'}$$

les 3 plans $\alpha' B' C'$, $\beta' C' A'$, $\gamma' A' B'$ déterminent un point a pour lieu géométrique un plan

II. Si, dans les mêmes conditions, on fait tourner autour d'un point fixe un plan qui coupe les 3 arêtes du 1er tétraèdre en α, β, γ, et que l'on prenne les 3 points α', β', γ' sur les arêtes du 2e tétraèdre suivant la même loi; le plan déterminé par ces 3 points $\alpha' \beta' \gamma'$ passera constamment par un point fixe.

Chacun de ces 2 théorèmes, qui sont ici des corollaires de la théorie des figures homographiques, est tel qu'on en peut déduire toute cette théorie, et le principe de l'homographie lui-même.

— Construction analytique des figures homographiques.

Soient OX, OY, OZ les 3 axes homologues de Ox, oy, oz; les formules de transformation sont :

$$x = \frac{\lambda X}{\alpha X + \beta Y + \gamma Z + 1}, \quad y = \frac{\mu Y}{\alpha X + \beta Y + \gamma Z + 1}, \quad z = \frac{\nu Z}{\alpha X + \beta Y + \gamma Z + 1}$$

Si l'on mène le plan YOZ parallèle au plan ~~qui dans la 1e fig.~~ homologue de l'infini de la figure xyz, on a simplement :

$$x = \frac{\lambda X}{X - A}, \quad y = \frac{\mu Y}{X - A}, \quad z = \frac{\nu Z}{X - A}$$

($X - A = 0$ étant l'équation du plan homologue de l'infini.)

Ces formules sont ~~absolument~~ générales.

Dans le plan, les formules générales sont :

$$x = \frac{\lambda X}{\alpha X + \beta Y + 1}, \quad y = \frac{\mu Y}{\alpha X + \beta Y + 1},$$

ou simplement : $x = \dfrac{\lambda X}{X - A}$, $y = \dfrac{\mu Y}{X - A}$

($X - A = 0$ étant l'équation de la droite homologue de l'infini)

Les formules suivantes (dues à Newton) sont tout aussi générales : $x = \dfrac{\lambda}{X}$, $y = \dfrac{\mu Y}{X}$.

Pour cela, il faut prendre OX et ox homologues de l'infini, et OY et oy homologues l'un de l'autre.

Pour placer 2 figures homographiques de manière que, r
à un même système d'axes elles donnent lieu aux formul
les plus simples, il suffira de prendre la droite I homo
de l'infini de la 1re, la droite J homologue de l'infini
la 2e, et de les faire coïncider, en les prenant pour axe
x et des X. On prendra pour axe des y et des Y la dro
qui est à elle-même son homologue dans la nouvelle
position des 2 figures (il en existe toujours une telle dans
toute position de 2 figures homographiques.) On aur
les formules:

$$x = \frac{\lambda}{X}\,, \qquad y = \frac{\mu Y}{X}.$$

Les formules générales de transformation homographique
les 2 figures sont rapportées aux mêmes axes et situées
manière qcque l'une par rapport à l'autre, sont (Waring

$$\left\{\begin{aligned} x &= \lambda\,\frac{a'X+b'Y+c'Z+1}{aX+bY+cZ+1} \\ y &= \mu\,\frac{a''X+b''Y+c''Z+1}{aX+bY+cZ+1} \\ z &= \nu\,\frac{a'''X+b'''Y+c'''Z+1}{aX+bY+cZ+1} \end{aligned}\right.$$

et dans le plan

$$x = \lambda\,\frac{a'X+b'Y+1}{aX+bY+1}$$

$$y = \mu\,\frac{a''X+b''Y+1}{aX+bY+1}$$

Étant données dans un plan 2 figures dont les coordon
(par rapport aux mêmes axes) vérifient les relations précé
on peut toujours, en changeant leur position relative, le
rapporter à un système d'axes tels que les relations entre
coordonnées de 2 points correspondants qcques soient de
forme

$$x = \frac{\lambda}{X}\,, \qquad y = \frac{\mu Y}{X}$$

[Dans les formules générales figurent 15 coefficients arbitraires: 6 déterm
la position de la figure homographique, il en reste 9 ~~pour~~ déterminer la 2

Théorie des figures homologiques (Poncelet)

Si l'on prend les points a, b, c, d pour leurs propres homologues, et si de plus on prend pour homologue d'un 5e point $\underline{m}$ un point m' de la droite dm, les coefficients λ, μ, ν seront égaux dans les formules:

$$\frac{a\alpha}{d\alpha} = \lambda \frac{a\alpha'}{d\alpha'}, \quad \frac{b\beta}{d\beta} = \mu \frac{b\beta'}{d\beta'}, \quad \frac{c\gamma}{d\gamma} = \nu \frac{c\gamma'}{d\gamma'}$$

parce que les 3 rapports anharmoniques égaux à λ, μ, ν seront tous égaux au rapport anharmonique des 4 points d, m, m' et δ (point où la droite $\underline{dm}$ perce le plan $\underline{abc}$). Tous les couples de points homologues seront alors en ligne droite avec $\underline{d}$. Tous les points du plan $\underline{abc}$ seront leurs propres homologues; les plans homologues et les droites homologues se coupent dans ce plan. Toute droite et tout plan passant par le sommet $\underline{d}$ est son propre homologue. Le point $\underline{d}$ est le centre d'homologie; le plan $\underline{abc}$ est le plan d'homologie.

Propriété fondamentale des figures homologiques:

Soient a, a' 2 points homologues, S le centre d'homologie, A le point où la droite Saa' perce le plan d'homologie: on a la relation:

$$\frac{Sa}{Sa'} : \frac{Aa}{Aa'} = C^{te}.$$

Les plans homologues de l'infini dans les 2 figures sont parallèles au plan d'homologie. Soit $a'i'$ la distance du point a' au plan I' homologue de l'infini de la 1re fig: on a:

$$Sa = \lambda . \frac{Sa'}{a'i'}$$

Soit ai la distance du point a au plan I homologue de l'infini de la 2e fig: on a

$$ai . a'i' = C^{te}$$

(cf. page 2 du mém. sur le princ. d'homogr.)

Dans la relation générale, on peut remplacer les segments S

Aa' par les distances des points a et a' au plan d'homo

d'où ce <u>théorème</u>: Dans deux figures homologiques le

des distances de 2 points homologues au centre d'homo

est proportionnel au rapport de leurs distances au plan d'h

(cf. page 5 du mém. sur le princ. de dualité)

Propriété fondamentale des axes conjugués d'une quadrique.
Soit une surface du 2e degré A, un point fixe S et un plan fixe P; soit ap la distance d'un point a de la surface au plan P.
Si l'on porte sur Sa une longueur: $Sa' = \lambda \frac{Sa}{ap}$,
le point a' décrira une surface homologique de la proposée; S sera le centre d'homologie, et le plan P sera le homologue de l'infini de la nouvelle figure.
Si, de plus, le plan P a pour pôle S par rapport à la 1e surface le point S sera le centre de la 2e surface (pôle de l'infini)
Donc: Étant donnée une quadrique, tout point de l'espace peut être pris pour le centre d'une nouvelle quadrique homologique de la 1e par rapport à ce centre.
Cette 2e quadrique est indéterminée de grandeur, mais sa forme est déterminée dès qu'on a choisi le point S.
Inversement, la surface A' étant donnée, on peut construire une surface A homologique de A' par rapport au ~~son~~ centre S de A'
Cette surface sera indéterminée de forme et de position, car le plan P est alors arbitraire. On la construira par la formule:

$$\frac{Sa}{ap} = \frac{1}{\lambda} Sa'$$

Si A' est une sphère, on a: $\frac{Sa}{ap} = C^{te}$
propriété connue des surfaces de révolution du 2e degré:
La surface homologique d'une sphère par rapport à ~~son~~ centre est une quadrique de révolution ayant ce centre pour foyer.
– Deux surfaces de révolution qui ont un foyer commun sont homologiques par rapport à ce foyer.
– Menons dans A' 3 diamètres conjugués (la polaire de chacun d'eux est à l'infini dans le plan des 2 autres) Leurs homologues seront 3 axes conjugués de la quadrique A

par rapport au point S. Or ces droites sont à elles-même leurs homologues (car elles passent par S) d'où le théorème.

Chaque système de 3 axes conjugués d'une quadrique relatifs à un point fixe, forme, en direction, un système de 3 diamètres conjugués d'une autre quadrique ayant son centre en ce point, et homologique de la première par rapport à ce point.

Les demi-diamètres de la seconde quadrique se construisent par la formule: $$Sa' = \lambda \frac{Sa}{ap}$$

ap étant la distance du point $\underline{a}$ au plan polaire de S par rapport à la quadrique proposée.

Soient 3 axes conjugués Sa, Sb, Sc, et les 3 diam. conjugués correspondants: $Sa' = \lambda \frac{Sa}{ap}$, $Sb' = \lambda \frac{Sb}{bp}$, $Sc' = \lambda \frac{Sc}{cp}$

On sait que: $$Sa'^2 + Sb'^2 + Sc'^2 = C^{te}$$

Donc $$\left(\frac{Sa}{ap}\right)^2 + \left(\frac{Sb}{bp}\right)^2 + \left(\frac{Sc}{cp}\right)^2 = C^{te}$$

(cf. p. 6 du mém. sur le princ. d'homogr.) (p. 22.)

Parmi tous les systèmes d'axes conjugués relatifs à un point il y en a un où les 3 axes sont rectangulaires.

Si les 3 demi-diamètres Sa', Sb', Sc' sont rectangulaires on a $\frac{1}{Sa'^2} + \frac{1}{Sb'^2} + \frac{1}{Sc'^2} = C^{te}$ Donc: $\left(\frac{ap}{Sa}\right)^2 + \left(\frac{bp}{Sb}\right)^2 + \left(\frac{cp}{Sc}\right)^2 =$

Autre forme de la formule générale: soient a, b les extrémités d'un axe conjugué; a', b' les extrémités du diam. correspondant; $Sa' = \lambda \frac{Sa}{ap}$ $Sb' = \lambda \frac{Sb}{bp}$ $Sa' =$

On a: $\frac{1}{ap} \pm \frac{1}{bp} = C^{te}$ (+ quand S est à l'intérieur de la

D'où: $$\frac{1}{Sa'} = \mu\left(\frac{1}{Sa} \pm \frac{1}{Sb}\right)$$

Système particulier de transformation homographique

Si le plan à l'infini est son propre homologue, et si les axes Ox', Oy', Oz' sont homologues respectivement des axes Ox, Oy, Oz, les formules de transformation deviennent :

$$x' = \lambda x, \qquad y' = \mu y, \qquad z' = \nu z.$$

Cette transformation est caractérisée par la conservation du parallélisme : les droites et plans parallèles ont pour homologues des droites et plans parallèles.

Deux droites homologues sont divisées en parties proportionnelles par des points homologues.

D'où les relations métriques suivantes :

Le rapport de 2 segments rectilignes parallèles est égal au rapport de leurs homologues.

Le rapport des aires de 2 polygones situés dans des plans parallèles est égal au rapport des aires des polygones homologues.

Les volumes de deux solides homologues sont proportionnels.

Ces relations métriques sont susceptibles d'une représentation géométrique. Soit une sphère de la 1e figure ; elle a pour homologue un ellipsoïde de la 2e fig. Le rapport d'un segment AB de la 1e fig. au rayon R de la sphère qui lui est parallèle est égal au rapport du segment homologue A'B' au demi diam. D de l'ellipsoïde qui lui est parallèle : donc

$$\frac{AB}{R} = \frac{A'B'}{D} \qquad \text{ou} \qquad AB = \lambda \frac{A'B'}{D}$$

Toute relation entre des longueurs rectilignes se transformera en divisant les longueurs des lignes homologues par les demi diamètres qui leur sont parallèles ds un ellipsoïde fixe.

Toute relation entre des aires planes se transformera en divisant les aires des fig. planes homologues par les aires des parallélogrammes

construits sur 2 diamètres conjugués de l'ellipsoïde situés dans des plans respectivement parallèles à ceux de ces fig.

Transformation des propriétés de la sphère et du cercle en propriétés de l'ellipsoïde et de l'ellipse.

L'équation de la sphère : $x^2+y^2+z^2=1$

devient : $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

A deux rayons perpendiculaires d'un cercle :

$$x''=y' \qquad y''=-x'$$

correspondent 2 demi-diamètres conjugués de l'ellipse

$$x''=\frac{a}{b}y' \qquad y''=-\frac{b}{a}x'$$

rapportée à 2 ~~axes~~ diamètres conjugués qcques.

Soit un ellipsoïde rapporté à 3 diamètres conjugués Ox, soit un point $\underline{m}$ rapporté à ces 3 axes, et $\underline{d}$ le point où le rayon Om perce l'ellipsoïde : on a (x, y, z étant coord. de $\underline{m}$) :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{\overline{Om}^2}{\overline{Od}^2}$$

Autre forme de la théorie des figures homographiques.

On dit que 2 droites sont divisées homographiquement si l'on fait correspondre les points de l'une aux points de l'autre de telle sorte que le rapport anharmonique de 4 points quelconques de l'une soit égal au rapport anharmonique des 4 points correspondants de l'autre.

Si l'on a 2 séries de plans passant respectivement par 2 droites, on dit qu'ils forment 2 faisceaux homographiques si l'on ~~établit entre~~ fait correspondre les plans de l'un aux plans de l'autre de telle sorte que le rapport anharmonique de 4 plans quelconques de l'un soit égal au rapport anharmonique des 4 plans correspondants de l'autre.

De même, dans un plan, 2 faisceaux de droites sont homographiques quand etc.

1e Proposition. Quand 2 droites de l'espace sont divisées homographiquement, les droites qui joignent les points homologues forment un hyperboloïde à une nappe.

2e Proposition. Quand on a dans l'espace 2 faisceaux de plans homographiques, les droites d'intersection des plans homologues forment un hyperboloïde à une nappe.

Propositions analogues dans le plan.

1e Proposition. Quand 2 droites d'un plan sont divisées homographiquement les droites qui joignent les points homologues enveloppent une conique tangente à ces 2 droites.
(propriété anharmonique des tangentes d'une conique)

2e Proposition. Quand on a dans un plan 2 faisceaux de droites homographiques, les droites homologues se coupent sur une conique qui passe par les sommets des 2 faisceaux.
(propriété anharmonique des points d'une conique)

Corollaire. Quelle que soit la position relative de 2 figures homograph[iques] dans un même plan, il existe en général 3 points et 3 dr[oites] qui coïncident avec leurs homologues. Deux des 3 po[ints] peuvent être imaginaires, le 3e est toujours réel. Deux [des] 3 droites peuvent être imaginaires, la 3e est toujours ré[elle]. Quand les 3 points sont réels, les 3 droites sont celles qui [les] joignent.

Application à la perspective (cf. Clebsch, ch. III, §[…]

La perspective est une transformation homographique d[es] figures planes. — Inversement, la transformation homograph[ique] des figures planes peut se ramener à la perspective.

Problème. Étant donnés 2 quadrilatères plans, dont l[es] sommets se correspondent un à un, les placer dans l'esp[ace] de manière qu'ils soient la perspective l'un de l'autre.

— S'ils sont en perspective les côtés homologues se coup[ent] sur une même droite (l'intersection des 2 plans); si l'on [rabat] l'un des plans sur l'autre par une rotation autour de l'[…] intersection, les sommets des 2 quadrilatères seront toujo[urs] en perspective. Tout revient donc au problème suivant

— Étant donnés 2 quadrilatères qqcques dans un plan, dont les sommets se correspondent un à un, les placer dans le [plan] de manière que les droites qui joignent les sommets correspondants concourent en un point, et que les côtés correspondants se [coupent] sur une même droite

Soient abcd, a'b'c'd' les 2 quadrilatères donnés. Ce sont [des] figures homographiques complètement déterminées, où l'on peut construire avec ces données les points homologues [de] points qqcques, et les droites homologues de droites qqcques

On déterminera la droite I homologue de l'infini de la 2e fig. et la droite J' homologue de l'infini de la 1e fig. On les disposera parallèlement l'une à l'autre. Par le point e où ab rencontre I on mènera eg parallèle à a'b': la droite homologue e'g' sera parallèle à a'b', donc à eg. De même par le point f où cd rencontre I on mènera fh parallèle à c'd': la droite homologue f'h' sera parallèle à c'd', donc à fh. Soit S l'intersection de eg, fh, S' l'intersection de e'g', f'h': il suffira de faire coïncider les angles (égaux) eSf, e'S'f' pour résoudre le problème.

Le point S (ou S') sera le point de concours des droites qui joignent les points homologues: car les droites Se, Sf et Si (parallèle à I et J') sont leurs propres homologues.

La droite où se coupent toutes les droites homologues est parallèle à I et à J', et distante de I d'une longueur égale à la distance de S à J'.

Pour mettre les deux figures en perspective dans l'espace il suffit de faire tourner l'une d'elles autour de la droite précédente (ligne de terre).

Ainsi deux figures homographiques planes qcq. peuvent être mises en perspective.

Deux perspectives d'une même figure plane peuvent être mises en perspective.

Mais: Deux figures homographiques à 3 dimensions ne peuvent pas, en général, être placées de manière à devenir homologiques.

La transformation homographique dans l'espace est donc plus générale que la transformation homologique.

Formules pour construire un triangle rectangle à côtés rationnels :
la 1e de Pythagore, la 2e de Platon, selon Proclus ;
la 1e de Pythagore, la 2e d'Archytas, selon Boèce.

Cas où a est impair : $\left(\frac{a^2+1}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2-1}{2}\right)^2 + a^2$

Cas où a est pair : $\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2+1\right]^2 = \left[\left(\frac{a}{2}\right)-1\right]^2 + a^2$

Formule plus générale de Brahmegupta :

$$\frac{1}{4}\left(\frac{a^2}{b}+b\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{a^2}{b}-b\right)^2 + a^2.$$

Brahmegupta (VIe siècle) ~~Bija~~ Ganita (Arithm.) Cuttaca (Algèbre)
Bhascara Acharya (XIIe s.) Lilavati (Arithm.) Bija-Ganita (Algèbre)

Dans le trapèze (quadrilatère inscriptible ayant ses diagonales perpendiculaires) l'aire est égale à la demi-somme des produits des côtés opposés (car cette aire est égale au demi-produit des diagonales, lequel produit, par le th. de Ptolémée, est égal à la somme des produits des côtés opposés.)

Pour un quadrilatère ~~égal~~ inscrit de périmètre 2p, des côtés a, b, c, d, l'aire est $\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$

Pour ~~le~~ un triangle quelconque l'aire est $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
c'est un cas particulier du quadrilatère ($d = 0$.)

Triangle dont les côtés, la hauteur et l'aire sont rationnels : 13, 14, 15, formé des 2 tr. rect. 5, 12, 13, et 9, 12, 15.

Pour construire le trapèze, on prend 2 triangles rectangles à côtés rationnels : a, b, c et a', b', c'. Les 4 côtés du trapèze sont ac', bc', a'c, b'c : dans l'ordre : ac', ~~bc~~, a'c, bc', b'c.

Diagonales : ab' + ba', aa' + bb'.

Le diam. du cercle circonscrit est égal à la racine carrée de la somme des carrés des côtés opposés ; cc'.

(La perp. abaissée du point de rencontre des 2 diag. sur un ... partage ~~les autres~~ côté opposé en 2 segments égaux)

Car la somme des carrés des côtés opposés est égale à la somme des carrés des 4 segments des 2 diagonales, laquelle est égale au carré du diamètre.

Praetorius (1537-1616) Problema quod jubet ex quatuor lineis rectis datis quadrilaterum fieri, quod sit in circulo, aliquot modis explicatum. Nuremberg 1598. in 4o. 36 p.

Oronce Finée : Géométrie. Arithmetic. practica

Morsianus : Arithm. practica. Gemma Frisius : Arithm. pr...

Léonard de Pise, dit Fibonacci (1202) Pratique de la Géomét...

Jordan Nemorarius : Arithmétique pratique (v. 1200) Arithm...

Cardan Ars magna. Practica arithmetica. De subtilitate

Sacro Bosco : Tractatus Algorismi (1236) en vers De sphaera

Ramus : Schola mathematica Francfort 15..

Vincent de Beauvais (1194-1264) Speculum doctrinale

Lucas di Borgo : Euclide (Venise 1509) Summa de Arithm. Geometria de Divina proportione.

Verba filiorum Moysi, filii Schaker, Mahumeti, Hameti, ... (Mohammed ben Musa) à la Bibliothèque Nat. (en ...

Tartalea : Traité des nombres et des mesures. Algebra nova (...

Bède le Vénérable (672-735) Œuvres math. Traité attrib. à G...

Libri : Hist. des Sc. math. en Italie

Montucla : Hist des Math. Delambre : Hist de l'Astron. an...

Georgii Valla Placentini ... de expetendis et fugiendis rebus opus ... Venise, 1501.

Margarita philosophica (1496.)

Albert Girard: Trigonométrie (1626.)

Ludolph van Ceulen: de problematibus miscellaneis.

J. B. de Benedictis: Diversarum speculationum mathematicarum et physicarum liber Taurini, 1585.

Scaliger: Cyclometrica elementa (Leyde, 1594) (erreurs)

Adrianus Romanus: Apologia pro Archimede ... Wirceburgi, 1597.

Clavius: Géométrie pratique. Euclidis elementa Rome, 1574

Simon Jacob: Rechnung auf der Linie. Francfort 1557.

Rechenbuch auf der Linie und Ziffern. 1560.

Jacques de Billy: Diophantus geometra Paris, 1660.

Tr. de proportione harmonica. Paris, 1658.

Purbach (1425-1461): Tractatus Georgii Purbachii super propositiones Ptolemaei de sinibus et chordis.

~~Regiomontanus (1436-1476)~~

Logistica (1559)

Butéon (1492-1572) De quadratura circuli. Lyon 1559.

Richthové (comm. ~~XVI~~e s.) Praxis numerandi quam abacum dicunt.

Simon Stevin: Oeuvres mathém. Leyde, 1634.

...: Algorithmus demonstratus

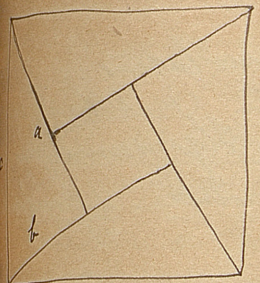
...: Logistica arithmetica quaestionis.

...ianus Capella: Satyricon Cassiodore Boèce: Géom.

Sextus Frontinus: De aqueductibus urbis Romae

Alstedius : Encyclopædia universa Herbornæ, 1620, 1630, Lyon
Kircher : Arithmologia Rome 1665. Ars magna lucis et umbræ Rome
Jacques Peletier, du Mans : Euclidis Elementa Lyon, 15..
(Algèbre (1554.) en français : Genève 16..
~~Thomas Bradwardin : Geometria speculativa~~ Paris 1496.
Heilbronner : Historia Matheseos.
Charles de Bouvelles : Géométrie en latin 1503, en français
Daniel Barbaro : La pratica della prospettiva. Venise 15..
Jean Broscius : Apologia pro Aristotele et Euclide contra Ramum et
Dantisci, 1652
~~Stifel (XVI e s.) Arithmetica integra~~
Mohammed ben Musa : Tr. de Algèbre (Algebra et Almucabala)
(IXe s.) De fig. planis et sphæricis.
Casiri : Bibliotheca Arabico-Hispana
Albindus (contemp. de Moh. ben Musa) Arithm. Indica : Algèbre
Albategnius († 928.) astronome Trigonométrie : Sinus & co..
Aboul Wefa (937-998) tangentes (Mohammed ben ..
Ibn-Younis (979-1008). Alfarabius (Xe s.)
Geber (1058) Trig. sphérique
Thébit ben Corah, élève de Moh. ben Musa gnomonique
application de l'algèbre à la géométrie.
Aboul Hassan Ali du Maroc (XIII e s.) gnomonique ; sections co..
ap. Sedillot : Tr. des instruments astron. des Arabes. Paris
Mahomet Bagdadin (Xe s.) De superficierum divisionibus
trad. par Jean Dee et Commandin.
Alhasen : Opticæ thesaurus (Bale 1572)
Hassan ben Haithem († 1038) Tr. des connues géométriques
Nassr-ed-din de Thus (1201-1274) Euclide, avec commentaire (Rome 1..

Bhascara démontre ainsi le carré de l'hypoténuse :



$$c^2 = 4\,\frac{ab}{2} + (a-b)^2 = 2ab + (a-b)^2$$
$$= a^2 + b^2.$$

Bède le Vénérable : Musique, Astronomie

De (numeris (arithmeticis) De numerorum divisione

De arithmeticis propositionibus.

Alcuin, élève de Bède

Gerbert (pape 999, † 1005) Géométrie. Abacus compositus.

Adalbolde, évêque d'Utrecht : de l'Astronomia seu Abaco.

Volume de la sphère : $D^3\,\frac{11}{21}$.

Heriger, abbé de Laubes , Ratio Abaci.

Bernelin : Abacus, Musica, Arithm. et Geom.

De Abaco et numeris.

Hermann Contractus : Quadrature du cercle. Astrolabe (XIe s.)

Adhélard (XIIe s.) traduit Euclide de l'arabe

Gérard de Crémone (1114-1187.) traduit les Arabes. Algorismus.

Platon de Tivoli (Tiburtinus) trad. les Sphériques de Théodose (1120.)

Jean de Séville (Johannes Hispalensis) trad. des ouvrages astron. arabes. Algorismus. Algebra et almucabala

Rodolphe de Bruges. trad. Ptolémée de l'arabe

s. – Campanus. trad. Euclide. Trisection de l'angle

Division d'une droite en moyenne et extrême raison

Sacro Bosco ; De sphaera mundi . De Algorismo [en v..]
de Computo .

Alexandre de Villedieu : Arithmétique en vers latins .

Jordan Nemorarius : Arithmétique (spéculative ou Arithm. prat.) ; Algorismus (vers...)
Planisphère de Triangulis . de Geometria . de ponderibus
Optique

Albert le Grand :

Roger Bacon : Opus majus . Specula mathematica

Vitellion : Optique

Peccam, arch. de Cantorbery : Optique

Vincent de Beauvais : Speculum mundi (1194 – 1264)

Léonard de Pise, dit Fibonacci : Liber Abbaci (1202)
Algebra et Almucabala . Practica geometria (1220)
Traité des nombres carrés . Alliance de l'algèbre et de la géométrie
à l'exemple des Arabes .

XIV siècle Thomas de Bradwardin arch. de Cantorbery . Théorie
des polygones égrédients (étoilés) Geometria speculativa (impr.
1496) Th. des isopérimètres .

Pedisianus : Géométrie, géodésie ,

Barlaam : Logistica (en grec) algèbre

Killingworth : Algorisme Tables astronomiques .

Simon de Bredon : comm. de l'Almageste

Isaac Argyrus : Tables astronomiques Astrolabe . Géom...

Paolo di Dagomari (dit dell'Abbaco)

Biagio di Parma

Prosdocimo de Padoue : De algorithmo (impr. en 1483)

Siècle. Connaissance directe de la science grecque par les manuscrits.
Progrès de l'algèbre
Purbach, astronome : Théoriques des planètes (impr. en 1488 à Venise)
(1425 † 1461) Algorismus (Vienne, 1515)
Traduction de Ptolémée par Purbach et Regiomontanus (Venise, 1496)
Jean Regiomontanus, restaurateur des sciences grecques (1436-1476)
De triangulis (Nuremberg, 1533) la 2e trigonométrie.
Algorismus demonstratus (impr. par Schoner en 1534) usage des lettres même en arithmétique

Nicolas de Cusa, cardinal : quadrature du cercle
(Œuvres complètes, Paris, 1514 ; Bâle, 1565.) Platonicien.
Albert Durer : Géométrie artistique (en allemand) trad. :
Institutionum geometricarum libri IV. duplication du cube
Traité de perspective
Léonard de Vinci. Tour à ovale pour décrire l'ellipse
(cf note XXXIV.)
J. Verner : Traité des coniques (1532)
Lucas Pacioli, dit L. di Borgo : Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni e Proportionalità. (1494.)
Divina proportione (Venise, 1509) div. en moy. et extrême raison
Libellus... sur les polygones et polyèdres réguliers (1508)
Application de l'algèbre aux problèmes de géométrie
Stifel. Arithmetica integra (Nuremberg, 1544)
Christoph Rudolff : die Coss (algèbre) (1522) Adam Risen
Lefèvre d'Etaples (Faber Stapulensis) publie l'Arithmétique spéculative
Jordan Nemorarius (1496.) — Compendium arithmetices Boetii
(1480.) théorie des nombres.

Algorithmus de integris et minutiis (Leipzig, 1507)

J. B. Benedictis :- Diversarum speculationum mathematic et physicarum liber (Turin, 1583)

application de la géométrie à l'algèbre

Maurolycus: de lineis horariis libri III (1553, 1575)

La pointe du style d'un gnomon décrit une conique

Usage des lettres en Arithmétique et en Algèbre

Guarini: Euclides adauctus et methodicus, mathemat universalis (Turin, 1671)

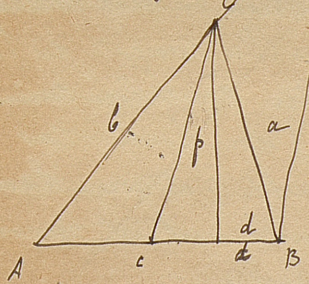
Mathematica caelestis (Milan, 1683)

Placita philosophica (Paris, 1666)

~~Malgré le manque de rigueur de ses arguments, nous ne ... pas pourtant pas que M Weber ait tort sur le fond des ... nous avons bien plutôt loin de le condamner, nous avons bien plutôt à le féliciter d'avoir entrevu le défaut de cuirasse de la physique évolutionniste~~

~~Il semble donc que M Weber ait raison sur le fond des choses aussi, loin de condamner sa critique ~~de l'évolutionnisme~~, nous le féliciterons d'avoir entrevu la contradiction ~~inhérente au principe~~ que recèle la physique évolutionniste. Cette contradiction M Poincaré l'a formulée plus haut d'une manière plus ... et rigoureuse.~~

~~Maly ~~Dès~~ Bien ce que ses ~~raisonnements~~ arguments ne soient pas rigoureux ~~manquent de rigueur~~~~



$$b^2-a^2 = \cancel{c^2\ d^2}\ d^2 - \cancel{e^2}\ e^2 - d^2.$$

$$(a+b)\frac{\cancel{b-a}}{(a-b)} = (d+e)(d-e) = c(d-e)$$

$$a^2 = b^2+c^2-2bc\cos\hat{bc} \qquad y = \frac{8-x}{2}.$$

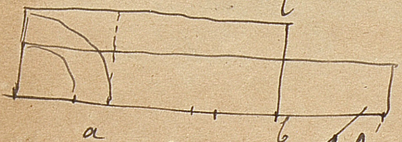
$$b^2 = a^2+c^2-2ac\cos\hat{ac} \qquad x.\frac{64-x^2}{4}$$

$$b^2-a^2 = c^2-2ac\cos\hat{ac}$$

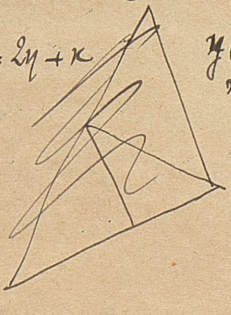
$$= c(c-2a\cos\hat{ac}) = c(c-2d) = c$$

$xy(x-y) = k^3.$

$x+y = 8.$



$8 = 2y+x$



$$y(x+y)x = k^3 \qquad \frac{a+b}{c} =$$

$$xy(x+y) = k^3$$

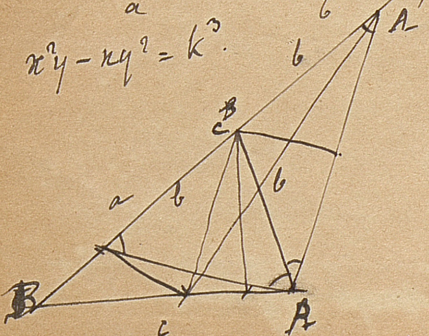
$$xy = d^2 \qquad x-y = d$$

$$\cancel{x(d-}\ x(x-d) = d^2$$

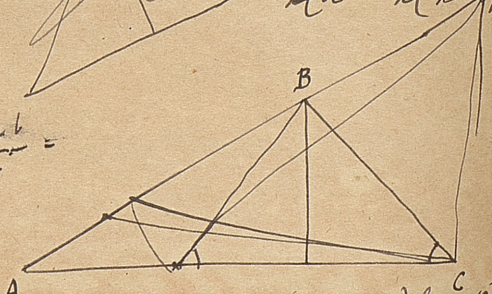
x^2-dx-

$x = \frac{d}{2} \pm$

$x^2y - xy^2 = k^3.$



$\frac{a+b}{c} =$



$$x(8-x)(2x-8) = k^3. \quad (8x-x^2)(2x-8) = 16k^3$$

Le mouvement dans ce cas n'est donc plus périodique. Ainsi,
~~Pour comprendre comment ce cas singulier peut~~
ns la suite ~~continue~~ des divers cas que présente le mouvement
pendule, ~~et que figurent géométriq.~~ les diverses positions du
n Π, tous sont périodiques, sauf un, et ce cas unique se
uve ~~à la limite des~~ entre les cas où le mouvement est une oscillation
rnative et ~~de~~ ceux où il est une rotation continue.

Pour mieux comprendre comment ce cas ~~singulier~~ est singulier peut
rattacher par continuité à deux cas généraux si différents
~~franchis (singulièrs) et opposés également~~ ~~même opposées, et s'appelant l'autre l'un,~~ il faut tenir compte de la
rée des périodes dans l'un et l'autre mouvement. ~~Cette durée~~
~~La durée~~ période (durée d'une oscillation dans le premier cas,
une rotation dans le second) est d'autant plus longue que
plan Π est plus voisin du point P. ~~Au dessus ou de~~ quand
plan Π passe par P ≠ la durée de l'oscillation ou de la rotation ×
ui se confondent dans ce cas), est infinie. On conçoit dès lors
ue ce cas particulier ~~de non~~ périodicité ~~soit~~ puisse être considéré comme
a limite (au sens mathématique du mot) des deux cas
énéraux qu'il sépare et relie tout ensemble, et que dans
e cas-limite, on puisse dire que le mouvement est encore
ériodique, mais que la période est infinie.

Cet exemple suffit à prouver que le principe de la conservation
l'énergie n'entraîne pas nécessairement la périodicité du
ouvement. Il nous servira encore à montrer le défaut de la
émonstration . . .

× ut M n'arrive au point P qu'après un temps infini:

Géométrie de Staudt.

Georg Karl Christian von Staudt : Geometrie der Lage
(ord. Prof. an d. Univ. Erlangen) (Nürnberg, 1847.)

§ 5: Éléments infiniment éloignés.

54. On a vu (§ 3) qu'en beaucoup de cas un point est remplacé par une direction, une droite par une position (Stellung), et qu'ainsi les éléments d'une droite comprennent encore sa direction, et les éléments d'un plan comprennent encore sa position et toutes les directions qui y sont contenues. Deux droites situées dans un même plan ont ou un point commun, ou même direction. Deux plans ont, ou une droite commune, ou même position. Un plan contient, soit un seul point d'une droite ~~qu~~ non située dans ce plan, soit seulement la direction de cette droite. Il ne sera donc pas inutile (unzweckmässig) d'introduire pour la direction et la position d'autres expressions qui rappellent immédiatement ce qu'elles remplacent et donnent aux propositions, qui ne sont que des modifications particulières d'autres propositions, une forme appropriée (als solche bezeichnen!)

55. Rotation d'une droite dans un plan; déplacement de son point d'intersection avec une autre droite fixe du plan. Si l'on attribue à chaque droite un point infiniment éloigné, où elle est coupée par toutes les droites et tous les plans qui lui sont parallèles, cette droite apparaît comme une ligne fermée.

56. Tous les points infiniment éloignés d'un plan sont dits situés sur une ligne infiniment éloignée, et comme toute droite du plan la coupe en un seul point, on l'appelle une droite.

57. Tous les points et droites infiniment éloignés sont dits situés dans une surface infiniment éloignée, et comme toute droite la

coupe en un point et tout plan ~~en~~ suivant une droite, on l'appelle un plan.

58. Par la conception exposé dans ce §, qui par opposition avec la conception habituelle peut s'appeler (perspective) que des propositions souvent ~~toutes~~ différentes en apparence sont ~~réunies~~ rassemblées dans un énoncé, et on peut lever les exceptions qui autrement s'opposeraient fréquemment à l'établissement de lois générales.

~~Ce théorème~~ Cette proposition : Une droite est déterminée par deux points, comprend deux cas particuliers suivant qu'un des points ou tous les deux sont situés à l'infini. En effet une droite proprement dite est aussi déterminée par un point et par sa direction, et une position (droite à l'infini) est déterminée par deux directions (deux points à l'infini).

La proposition : Un plan est déterminé par une droite et un point extérieur à cette droite, contient le cas particulier où le point donné est à l'infini (c'est une direction donnée) (36) et le cas particulier où la droite donnée est à l'infini (c'est la position du plan qui est donnée) (38).

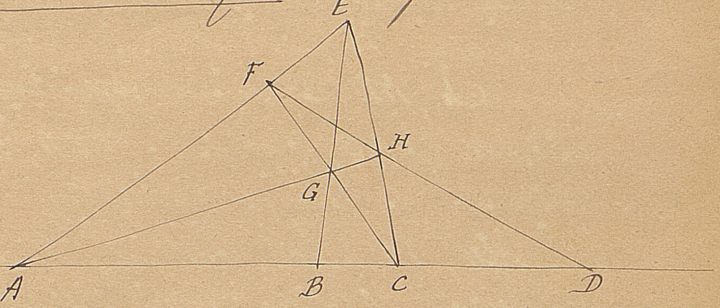
65. Deux rayons parallèles AP, BP rencontrent le plan de l'infini au même point P, ~~et~~ du même côté s'ils sont de même sens, de côtés opposés s'ils sont de sens contraire. En effet, la ligne brisée APB traverse le plan de l'infini dans le second cas, et ne fait que le toucher dans le premier.

† 61. Toute droite est partagée par deux quelconques de ses points en deux segments AB et A·B (ou B·A) complémentaires l'un de l'autre. Un segment est donc, ~~1o~~ 1° soit fini, 2° soit aboutissant à l'infini, 3° soit passant par l'infini, 4° soit situé à l'infini.

64. Projection centrale ou perspective.

§ 8 : Figures harmoniques.

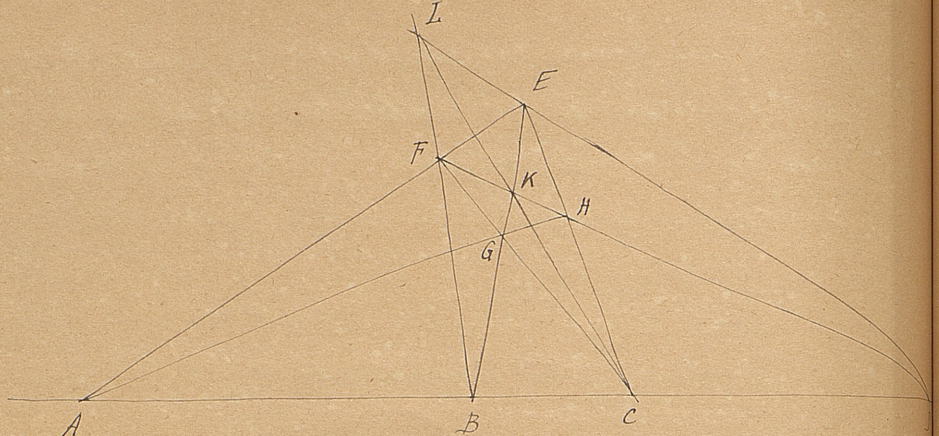
93. Si l'on donne sur une droite trois points A, B, C, et qu'l'on construise un quadrilatère tel, qu'une diagonale passe par le second des points donnés, et qu'en chacun des deux autres se coupent deux côtés opposés, l'autre diagonale du quadrilatère coupe cette droite en un quatrième point D qui est déterminé par les trois points donnés et qui s'appelle le quatrième point harmonique à ces points.



Les points A et C sont séparés (harmoniquement) par B et D.

94. Une figure rectiligne harmonique ABCD donne, par projection à partir d'un point quelconque S situé hors de la droite, un faisceau harmonique de rayons, lequel est à son tour coupé, par toute droite située dans son plan et ne passant pas par son sommet, suivant une figure rectiligne harmonique.

95. Une figure rectiligne harmonique ABCD, projetée à partir d'un axe s non situé dans un même plan, et par suite un faisceau harmonique de rayons, projeté à partir d'un point S non situé dans son plan, donnent lieu à un faisceau harmonique de plans, lequel est coupé, par toute droite qui ne rencontre pas son axe, suivant une figure rectiligne harmonique, et par tout plan qui ne passe pas par son axe, suivant un faisceau harmonique de rayons.



96. Si ABCD est une figure harmonique,
BCDA, CDAB, DABC ; DCBA, CBAD, BADC, ADCB
sont aussi des figures harmoniques.

En effet, 1° si l'on construit le quadrilatère EFGH, on voit que ADCB, CDAB, CBAD sont harmoniques.
2° Les triangles EFC, DBK sont perspectifs (car leurs côtés correspondants ~~concourent sur la~~ se coupent sur une même droite AGH) donc les droites ED, FB, CK (qui joignent leurs sommets correspondants) concourent en un même point L. En considérant le quadrilatère EKFL, on voit que DCBA, BADC, BCDA, DABC sont harmoniques.

102. Si l'on suppose qu'un point est projeté sur chaque côté d'un triangle depuis le sommet opposé, ou sur chaque arête d'un tétraèdre depuis l'arête opposée ;

1° Si sur chaque côté d'un triangle on prend deux points qui le ~~divisent~~ harmoniquement, et si 3 de ces points sont les projections d'un seul point, les 3 autres sont les traces d'une même droite ; et vice versa.

2° Si sur chaque arête d'un tétraèdre on prend deux points qui la divisent harmoniquement, et si six de ces points sont les projections d'un seul point, les 6 autres sont les traces d'un même plan, et vice versa.

(Principe de dualité)

§9. ~~Affinité~~ Relation projective entre figures uniformes.

103. Deux figures uniformes sont dites projectives (π) quand elles se correspondent l'une à l'autre de telle sorte qu'à une figure harmonique de l'une corresponde une figure harmonique de l'autre. (59.)

104. Deux figures uniformes projectives peuvent en outre être en perspective.

106. Si deux figures ~~uni~~formes projectives ont trois éléments correspondants communs, tous leurs éléments correspondants coïncident.

107. Si une figure rectiligne et un faisceau, ou si un faisceau de rayons et un faisceau de plans sont projectifs, et que trois éléments du premier soient situés dans les éléments correspondants du second, la première figure est une section de la seconde

110. Si l'on veut établir une correspondance projective entre deux figures uniformes, il suffit de choisir à volonté trois éléments de l'un et les trois éléments de l'autre qui doivent leur correspondre.

111. Deux figures rectilignes projectives situées sur une même droite sont dites en perspective, si elles ont au moins un élément homologue commun.

112. Deux figures rectilignes projectives qui ne sont pas des sections d'un même faisceau de rayons peuvent être considérées comme la première et la dernière de trois ou quatre figures rectilignes dont chacune est la projection de la précédente à partir d'un point.

A toute succession continue d'éléments dans l'une correspond une succession continue d'éléments dans l'autre.

116. Deux figures uniformes, composées chacune de trois éléments, sont toujours projectives (110.)

§ 10. ~~Affinité~~ Relation projective entre figures du second degré et entre systèmes de l'espace

121. Deux figures du second degré ou deux systèmes de l'espace ~~sont dits~~ {collinéaires / réciproques} ~~suivant~~ quand ils se correspondent de telle sorte que, à deux éléments hétérogènes P, q du premier dont l'un P est situé dans l'autre q, correspondent deux éléments hétérogènes P_1 q_1 du second système, dont l'un, P_1, {est situé dans / passe par} l'autre, q_1.

Deux systèmes réciproques à un même troisième sont collinéaires entre eux.

Réciprocité dans le plan et dans l'espace

122. Deux systèmes collinéaires ou réciproques sont projectifs. Si dans deux systèmes projectifs trois éléments correspondants d'une seule et même figure uniforme sont communs, tous les éléments de cette figure sont correspondants à eux-mêmes et communs.

123. Si deux figures collinéaires du second degré ont {quatre / en commun} éléments homogènes (de même espèce) [tels que trois quelconques d'entre eux n'appartiennent pas à une seule et même figure uniforme] correspondants ~~communs~~, tous leurs éléments coïncident.

Si un système plan est collinéaire à un faisceau de rayons, et que quatre éléments uniformes du premier [tels que trois quelconques d'entre eux n'appartiennent pas à une seule et même figure uniforme] sont situés dans les éléments homologues du second, le système plan est une section du faisceau de rayons.

124. Si deux systèmes collinéaires dans l'espace ont en commun quatre éléments homogènes correspondants [tels que, &a] mais qui appartiennent tous quatre à une seule et même figure du second degré, ils ont aussi en commun tous les éléments de cette même figure

Si deux systèmes collinéaires ont en commun cinq points correspondants, tels que quatre quelconques d'entre eux ne soient pas dans un même plan, ou cinq plans correspondants, tels que quatre quelconques d'entre eux ne passent pas par un même point, tous leurs éléments correspondants sont communs. (Il suffit de considérer les 4 droites déterminées par les 5 points ou par les 5 plans.)

125. Deux systèmes collinéaires peuvent en outre être situés en perspective.

129. Si l'on veut établir une correspondance projective entre deux figures fondamentales du second degré, il suffit de faire correspondre (par une relation projective) à deux figures fondamentales uniformes A, B de la première, qui ont un élément AB commun, deux figures fondamentales uniformes A_1, B_1 de l'autre, ayant aussi un élément commun A_1B_1, de telle sorte qu'à l'élément AB considéré comme élément de chacune des deux figures A, B corresponde l'élément A_1B_1 commun aux deux figures A_1, B_1.

130. Si l'on veut établir une correspondance projective entre deux figures fondamentales du second degré, il suffit de choisir à volonté quatre éléments homogènes [tels que, 8a] dans l'une, et les quatre éléments homogènes qui doivent leur correspondre dans l'autre.

Ainsi un quadrilatère plan complet et un quadrangle plan complet sont toujours réciproques. (cf. 116.)

133. Si l'on veut établir une correspondance réciproque entre deux systèmes de l'espace, on peut faire correspondre à cinq points de l'un (tels que quatre quelconques d'entre eux ne soient pas dans

un même plan) cinq plans de l'autre (tels que quatre quelconques d'entre eux ne passent pas par un même point).

Si l'on veut établir une correspondance collinéaire entre deux systèmes de l'espace, on peut faire correspondre soit cinq points de l'un (tels que 8°) à cinq points de l'autre (tels que 8°) soit cinq plans de l'un (tels que 8°) à cinq plans de l'autre (tels que 8°).

Ainsi l'ensemble de cinq points de l'espace et l'ensemble de cinq plans de l'espace sont toujours réciproques (cf. 130).

131. Si l'on veut mettre en perspective deux systèmes plans, situés dans un même plan, de telle sorte qu'ils aient en commun un faisceau de rayons donné S et une droite donnée V (se correspondant à eux-mêmes), on peut encore choisir à volonté, sur un des rayons du faisceau S, le point A_1 qui doit correspondre au point A du même rayon. De même :

135. Si l'on veut mettre en perspective deux systèmes de l'espace de telle sorte qu'ils aient en commun une gerbe de rayons donnée S et un plan donné V (se correspondant à eux-mêmes) on peut ...

Le point S s'appelle centre de perspective, le plan V (ou la droite V) où les droites homologues des deux systèmes se rencontrent plan de perspective (ou axe de perspective).

136. Quand deux systèmes de l'espace sont en perspective, toutes les figures rectilignes telles que SAA_1R (où S est le centre, R le point où le rayon rencontre le plan [ou la droite] V, A et A_1 les deux points homologues) sont projectives entre elles. Car soit un autre rayon SBB_1N : les deux rayons sont en perspective par rapport au point de concours des droites homologues AB, A_1B_1, lequel est situé dans le plan V (ou sur la droite V).

137. Puisqu'à chaque système Σ on peut assigner un système réciproque, la loi de réciprocité indiquée dans le § 6 se trouve démontrée (réciprocité du point et du plan dans l'espace, du point et de la droite dans le plan, du rayon et du plan dans la gerbe.) [Dans l'espace, la droite correspond au faisceau de plans, le plan à la gerbe de rayons; dans le plan, la droite correspond au faisceau de rayons.] Cf. nos 66, 76, 77.

Il suffira donc de prouver une proposition pour que sa réciproque soit par là même démontrée.

138. Deux systèmes collinéaires sont dits *en affinité*, si à chaque élément propre de l'un correspond un élément propre de l'autre et si, par suite, leurs éléments à l'infini se correspondent.

Deux systèmes collinéaires plans sont en affinité, quand ils ont en commun la droite de l'infini (homologue à elle-même)

Deux systèmes collinéaires de l'espace sont en affinité, quand ils ont en commun le plan de l'infini (homologue à lui-même)

Si deux systèmes en perspective sont en affinité, il faut, soit que le centre de perspective soit à l'infini, soit que le plan de perspective (ou ~~la droite~~ l'axe de perspective) soit à l'infini.

Pour mettre deux systèmes plans en affinité, on peut choisir à volonté *trois* points non situés en ligne droite dans le fini de l'un et ~~les~~ *trois* points non situés en ligne droite dans le fini de l'autre, qui doivent correspondre aux 3 premiers.

Pour mettre deux systèmes de l'espace en affinité, on peut faire correspondre à *quatre* points ~~de l'un~~ pris dans le fini de l'un et non situés dans un même plan, *quatre* points pris dans le fini de l'autre et non situés dans un même plan.

§ 11. Des lignes, des surfaces et des figures corrélatives

139. Si l'on appelle *faisceau* de rayons ou de plans, en général, toute succession continue de droites ou de plans, à toute ligne (succession continue de points) correspond, dans le plan, un faisceau de rayons, dans l'espace, un faisceau de plans (par réciprocité)

140. Dans deux systèmes réciproques de l'espace, à toute surface (considérée comme ensemble de points) correspond une gerbe de plans (dans un sens général) c à d un ensemble de plans du second degré.

A toute succession continue de droites correspond (par réciprocité) une succession continue de droites; en d'autres termes, à toute surface réglée correspond une surface réglée. Si l'une est considérée comme ensemble de points, l'autre sera une gerbe de plans, c à d l'ensemble des faisceaux de plans qui ont pour axe une des génératrices.

A une courbe plane correspond une surface conique.

141. Définition projective de la tangente à une courbe plane ou gauche, du plan tangent à une surface conique, du plan osculateur à une courbe gauche. Points saillants d'une courbe (caractérisés par deux tangentes différentes)

142. La suite des tangentes d'une courbe plane ou gauche forme un faisceau de rayons (plan) ou une surface réglée; la suite des plans osculateurs d'une courbe gauche ou des plans tangents à une surface conique forme un faisceau de plans.

Chaque courbe gauche représente donc un faisceau de rayons (surface réglée) osculateur, et un faisceau de plans osculateurs. A chaque point de la courbe correspond la tangente en ce point et le plan osculateur en ce point (tangent à la surface réglée [illegible] ~~tangente~~ ~~la tangente~~) Le point est le centre du rayon; la tangente est l'axe du plan

§ 16. Involutions.

213. Si dans deux figures fondamentales projectives entre elles, deux éléments homologues se correspondent doublement (réciproquement)(1), les deux figures sont dites *en involution* (π)
Cela suppose qu'elles ont tous leurs éléments communs, mais que tous leurs éléments correspondants ne coïncident pas.

214. Deux figures uniformes hétérogènes, ou encore un plan V et une gerbe S, sont dites en involution, si l'une d'elles est en involution avec une section de l'autre.(2)

215. Si deux éléments particuliers se corresp. doublement, il en est de même de deux éléments qcques, et il y a involution.

216. Si une figure uniforme est en involution avec elle-même ou bien elle ne contient aucun élément qui coïncide avec son correspondant, ou bien elle en contient deux (*éléments d'ordre*) ~~qui sont~~ dont chacun est son propre homologue, suivant que deux éléments homologues sont ou ne sont pas séparés par deux autres éléments homologues. Dans le dernier cas, les éléments d'ordre M, N sont séparés harmoniquement par deux éléments homologues qcques P, P_1 : $MNPP_1 \,\pi\, MNP_1P$.

217. Si l'on veut établir une involution dans une figure uniforme, on peut choisir à volonté, soit *deux* couples correspondants AA_1, BB_1 ; soit *un* couple AA_1 et *un* élément d'ordre M, soit *deux* éléments d'ordre M et N.

218, 219 : $ABC \,\pi\, A_1B_1C_1$ si : $AA_1BC \,\pi\, A_1AB_1C_1$

$MAB \,\pi\, MA_1B_1$ si : $MAA_1B \,\pi\, MA_1AB_1$

$MNA \,\pi\, MNA_1$ si : $MANA_1 \,\pi\, MA_1NA$ (figure harmonique)

L'ensemble de trois (ou de plus de trois) couples d'éléments homologues s'appelle une *involution*.

---

(2) C.à d. si à l'élément P du plan correspond l'élément SP_1 de la gerbe, et si à l'élément P_1 du plan correspond l'élément SP de la gerbe.

---

(1) C.à d. si à l'élément P de la première correspond l'élément P_1 de la seconde, et à l'élément P_1 de la première l'élément P de la sec.

§ 17. Systèmes involutifs.

226. Si l'on considère comme un seul système deux systèmes plans ou deux gerbes de rayons ou deux systèmes de l'espace, qui sont projectifs et en outre en involution, ce système sera appelé <u>système involutif</u>, si les deux systèmes sont collinéaires, et <u>système polaire</u>, s'ils sont réciproques.

227. Si l'on veut considérer un système plan comme involutif, il suffit de prendre dans le plan une droite V pour droite d'ordre et un point S (hors de cette droite) pour ~~centre~~ centre d'ordre. Sur chaque droite qui passe par le centre d'ordre S on prendra pour second point d'ordre celui où elle coupe la ligne d'ordre et dans chaque faisceau de rayons ayant son centre sur la ligne d'ordre V on prendra pour second rayon d'ordre celui qui passe par le point S.

§ 18. Systèmes polaires dans le plan et dans la gerbe.

234. Si deux systèmes réciproques sont situés dans un même plan et si les sommets d'un triangle qcque ABC correspondent aux côtés opposés, les systèmes sont en involution (forment un système polaire).

235. Dans un système polaire plan, chaque point s'appelle le pôle de la droite correspondante, et chaque droite la <u>polaire</u> du point correspondant. Les pôles de toutes les droites issues d'un même point sont sur la polaire de ce point, et les polaires de tous les points d'une même droite concourent au pôle de cette droite.

236. Dans un système polaire plan il y a une infinité de triangles polaires.

Il suffit de prendre une droite, son pôle A, et la polaire d'un de ses points B, laquelle coupe cette droite en C: le triangle ABC est autopolaire.

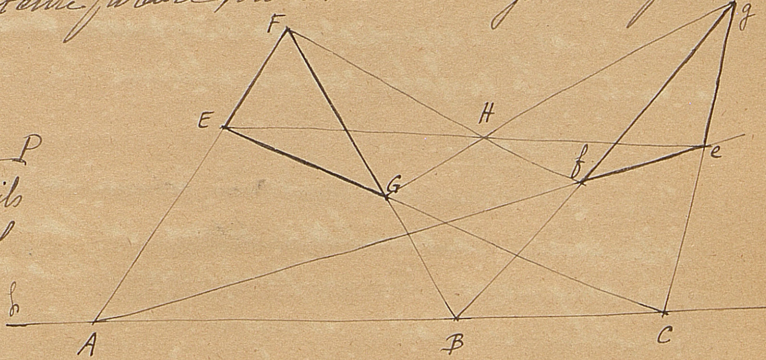
Si les sommets d'un triangle ABC sont les pôles des côtés d'un autre triangle $A_1B_1C_1$, les côtés du triangle ABC sont les polaires des sommets du tr. $A_1B_1C_1$; les deux triangles sont dits polaires réciproques.

237. Si l'on prend dans un plan un triangle ABC pour triangle polaire, et qu'on fasse correspondre à un point P non situé sur un côté du triangle une droite P_1 qui ne passe pas par un sommet de ce triangle, on détermine un système polaire.

238. Un système polaire est déterminé par un pentagone plan quelconque ABCDE, où l'on fait correspondre à chaque sommet le côté opposé. (Corollaire du th. précédent.)

239. Si de deux points l'un est situé sur la polaire de l'autre, et par suite l'autre sur la polaire du premier, les deux points (et les deux droites) sont dits conjugués entre eux (ou entre elles). Si un point est sur sa polaire, il est dit son propre conjugué (la droite aussi).

241. Deux triangles qui n'ont en commun aucun sommet ni aucun angle, mais qui sont situés dans le même plan et en perspective déterminent un système polaire, où ces deux triangles sont polaires réciproques.



89. Deux triangles (ou polygones) d'un même plan P sont en perspective, lorsqu'ils sont les projections d'un seul et même triangle (polygone) d'un plan V sur 2 points M, M_1; alors les droites qui joignent les sommets homologues concourent en un point S qui est la trace de la dr. MM_1 sur le plan P, et les côtés homologues se coupent sur une même droite V qui est la trace du plan V sur le plan P. — 90. Si deux triangles remplissent l'une de ces conditions, et que la droite V ne soit pas un de leurs côtés, ou que le point S ne soit pas un de leurs sommets, ils sont en perspective, et remplissent l'autre condition.

§ 19. Courbes et surfaces du second ordre

246. Dans un système polaire plan, ou bien il n'y a (235, 2[illegible]
aucun élément qui soit conjugué à lui-même, ou bien il y a
une courbe s de ordre pair, qui correspond au faisceau de rayons
qui l'enveloppe (au faisceau de ses tangentes), de telle sorte que
chaque point de la courbe est situé dans sa polaire, qui est tangente
à la courbe en ce point, et chaque point situé hors de cette courbe
(~~ligne~~ courbe de ordre du système polaire) est en dehors de sa polaire.

247. Surfaces coniques du second ordre.

248. Une courbe du second ordre s'appelle ellipse, parabole ou hyperbole, suivant que la courbe n'a aucun point commun avec la droite de l'infini, la touche en un point ou la coupe en deux points.

La section d'une surface conique du second ordre par un plan qui ne passe pas par le centre de la surface, est une ellipse, une parabole ou une hyperbole, suivant que la surface conique et le plan mené par son centre parallèlement au plan sécant n'ont aucun rayon commun, en ont un ou en ont deux communs. Dans ce dernier cas, les asymptotes de l'hyperbole sont les traces des plans tangents à la surface conique suivant les deux rayons communs.

Anhang.

336. De même que l'affinité est un cas particulier de la relation collinéaire, la similitude est un cas particulier de l'affinité et la congruence un cas particulier de la similitude. Dans les systèmes semblables les angles homologues sont égaux; dans les systèmes congruents les segments homologues sont aussi égaux. Deux droites projectives entre elles sont semblables si au point à l'infini de l'une correspond le point à l'infini de l'autre. Si en outre un segment quelconque de l'une est égal au segment correspondant de l'autre, les deux systèmes rectilignes sont congru

Du même auteur : Beiträge zur Geometrie der Lage.
Erstes Heft — Nürnberg 1856.
(sur les imaginaires et le rapport antiharmonique : Wurf.)
§8 : L'auteur introduit des nombres infinis, et désigne par $n+1$ le nombre des éléments réels d'une figure une forme (points d'une droite, rayons ou plans d'un faisceau, etc.)
Zweites Heft ——— 1857.
§28 : Nombres complexes (rapport antiharmonique dont le carré est ~~égal à 1~~ harmonique, c.à.d. égal à -1.)
Dritter Heft ——— 1860.

Extrait de la Préface de la Geometrie der Lage :
On a distingué avec raison, dans les temps modernes, la Géométrie de position de la Géométrie de la mesure, quoique pourtant des propositions où il n'est question d'aucune grandeur soient habituellement démontrées par la considération de rapports. J'ai essayé dans cet écrit de faire de la Géométrie de position une science indépendante, qui n'ait pas besoin de la mesure.....

Extrait de la Préface des Beiträge :
En s'efforçant de lever les exceptions aux règles et d'embrasser d'un seul point de vue différentes propositions, la mathématique est souvent obligée d'étendre certains concepts ou d'en introduire de nouveaux, ce qui indique presque toujours un progrès dans la science. Telle est notamment l'introduction de grandeurs imaginaires dans l'Analyse et l'introduction d'éléments

imaginaires dans la Géométrie. Qu'une ellipse ou une hyperbole soit déterminée par ses foyers et une tangente, les anciens géomètres le savaient déjà. Mais que la courbe soit déterminée par ce fait qu'on en donne cinq tangentes, et qu'ainsi le théorème énoncé ne soit au fond qu'un cas particulier d'une proposition plus générale, cela ne ressort que de la considération des éléments imaginaires. Dans ma G. der L. je n'ai pu pénétrer plus avant dans la théorie des éléments imaginaires, ~~dont~~ que les Beiträge sont principalement destinés à fonder, parceque je n'avais pas encore réussi à distinguer l'un de l'autre deux éléments imaginaires conjugués. ..... La théorie des éléments imaginaires confère une extension importante au domaine de la Géométrie, et facilite les vues d'ensemble sur les propositions .....

Dans la Géométrie analytique, on appelle un point imaginaire (ce qui paraît très simple) quand toutes ses coordonnées ne sont pas réelles. Mais par là on ne fait que transporter la langue de l'Algèbre dans la Géométrie, et l'on ne prouve nullement qu'un point imaginaire est, tout comme un point réel, qq chose d'indépendant du système de coordonnées. Où est, se demande-t-on, le point imaginaire quand on fait abstraction du système de coordonnées? Ainsi donc la Géométrie manquait, lorsqu'il s'agissait d'éléments imaginaires, de cette évidence ~~que~~ dont ailleurs on lui fait gloire, et qu'on a aussi le droit d'exiger d'elle.

Erlangen, mai 1856.

{ Figures uniformes ou du 1er degré: droite, faisceau de rayons, faisceau de plans
Figures du 2e degré: plan, gerbe de rayons (qui est aussi une gerbe de plans)
Figures du 3e degré: l'espace à 3 dimensions.
~~fondamentales~~

(1) Büschel (2) Bündel

nos 26, 28 (§ II.)

276

Beiträge zur Geometrie der Lage

§1. Figures élémentaires.

3. Par figure élémentaire on entend une figure uniforme, ou une courbe ou une surface conique ou un faisceau du second ordre, ou un faisceau réglé (Regelschaar = ensemble des génératrices d'un même système d'un hyperboloïde à une nappe, déterminé par 3 droites de ce système ou par 3 droites de l'autre système, appelé faisceau directeur = Leitschaar.) Il y a donc 3 espèces de figures élémentaires du premier ordre et 5 du second ordre. Une courbe du second ordre est considérée comme un ensemble de points; une surface conique du second ordre comme un ensemble de rayons.

24. L'ensemble de quatre éléments A, B, C, D d'une même figure élémentaire, conçus dans un ordre déterminé et comme appartenant à cette figure, s'appelle un jet (Wurf).
Deux jets $ABCD$ et $A_1B_1C_1D_1$, appartenant respectivement aux figures élémentaires G et G_1, sont dits projectifs entre eux si les deux figures G et G_1 sont projectives, et si aux éléments A, B, C, D de l'une correspondent les éléments A_1, B_1, C_1, D_1 de l'autre.

Parmi les 24 jets qu'on peut former avec quatre éléments A, B, C, D d'une figure élémentaire, ou bien il y en a huit harmoniques, ou bien il n'y en a aucun d'harmonique. Dans le 1er cas chacun des 24 jets est projectif à sept autres, dans le 2e cas à 3 autres. Dans tous les cas, en effet, on a

$$ABCD \barwedge BADC \barwedge CDAB \barwedge DCBA.$$

28. Un jet $abcd$ et quatre éléments homogènes A, B, C, D, qui sont situés dans un même plan ou qui passent par un même point, mais tels que trois quelconques d'entre eux n'appartiennent pas à une même figure uniforme, déterminent une figure élémentaire du second ordre à laquelle appartiennent les quatre éléments, et telle que le jet $ABCD$ soit, en elle, projectif au jet $abcd$.

Soient A, B, C, D les 4 sommets d'un quadrilatère plan, U une droite passant par D et coupant BC, AC, AB en A_1, B_1, C_1, qu'on prenne sur elle le point D_1 tel que le jet $A_1 B_1 C_1 D_1$ soit projectif au jet $abcd$, et qu'on fasse passer une courbe K du second ordre par les points $ABCDD_1$. Le jet $ABCD$ sera, dans la courbe K, projectif au jet $D_1(ABCD)$, donc au jet $A_1 B_1 C_1 D_1$ et par suite au jet donné $abcd$.

§ 3. Du sens des figures.

47. Trois éléments A, B, C d'une figure fermée, qui consiste en une succession continue de points, de droites ou de plans, déterminent une portion ABC de cette figure, qui part de l'élément A, passe par B et finit en C. Si l'on désigne la figure entière par ABC, on indique par là le sens dans lequel on la suppose décrite; si les éléments A, B, C se déplacent dans la figure sans jamais passer l'un par l'autre (coïncider), le sens ABC ne change pas. Le sens ABC est aussi BCA ou CAB, le sens opposé CBA peut aussi être désigné par BAC ou ACB. Dire que deux figures ABC, PQR ont le même sens c'est dire que les deux figures ABC, RQP sont de sens contraires.

§4. Figures en involution

70. Si dans deux figures élémentaires projectives qui coïncident l'une avec l'autre, deux éléments homologues se correspondent mutuellement, tous les autres éléments homologues se correspondent aussi mutuellement, et les deux figures sont dites en involution. On les considère habituellement comme ne formant qu'une seule figure, dont les éléments sont accouplés par involution.

71. Dans une figure élémentaire en involution $AA_1 . BB_1 .....$ ou bien chaque sens se correspond à lui-même, ou bien il correspond au sens opposé. Dans le premier cas, si le sens ABA_1 coïncide avec le sens correspondant A_1B_1A, chaque couple d'éléments ~~est séparé~~ partage la figure en deux portions correspondantes; chaque autre couple d'éléments homologues est séparé par les éléments du premier de sorte qu'aucun élément n'est son propre homologue. Dans le second cas, si le sens ABA_1 est opposé au sens A_1B_1A, aucun couple d'éléments n'est séparé par un autre couple d'éléments homologues; alors la figure contient deux éléments qui se correspondent à eux-mêmes, M, N, et qui par suite sont séparés harmoniquement par deux éléments homologues quelconques.

72. Si deux figures élémentaires $ABC....$, $abc....$, sont projectives entre elles ~~ou en perspective~~, à chaque involution $AA_1 . BB_1 . CC_1$ de l'une correspond une involution $aa_1 . bb_1 . cc_1$ de l'autre. Si ~~les deux~~ l'on accouple par involution les éléments de l'une, on accouple en même temps les éléments de l'autre par involution; et si les deux figures sont projectives ou en perspective, les deux systèmes involutifs ainsi obtenus seront projectifs ou en perspective.

74. Si un point S est situé dans le plan d'une courbe du second ordre, mais non sur cette courbe, et qu'on fasse correspondre les deux points A, A_1 où un rayon issu du point S rencontre la courbe, les éléments de la courbe seront accouplés par involution, aussi bien les tangentes que les points : car les deux droites a, a_1 tangentes à la courbe en A, A_1 se coupent sur la polaire s du point S et se correspondent par involution. Les points A, A_1, ces droites a, a_1 sont séparés harmoniqt par le point S et la droite s, et forment un système plan involutif dont le point S est le centre d'ordre et la droite s la ligne d'ordre.

Si ~~le point S~~ la courbe a deux tangentes issues du p. S, et par suite deux points sur la dr. s, ces points sont les points d'ordre de l'involution des points, et ces tangentes les droites d'ordre de l'involution des rayons. Dans le cas contraire, aucun élément ne se correspond à lui même dans les deux involutions. Dans tous les cas, S est le centre d'involution et s l'axe d'involution des deux systèmes de points et de rayons.

En projetant cette figure depuis un point M pris hors du plan, on obtient une surface conique et un faisceau de plans en involution : la droite MS est l'axe d'involution, le plan Ms le plan d'involution de chacun des deux systèmes.

83. Un jet abcd s'appelle jet ordinaire, si les éléments a, c sont séparés par les éléments b, d. Dans une figure élémentaire en involution qui n'a pas d'éléments d'ordre AA_1, BB_1, à deux éléments ~~correspo~~ homologues PP_1 correspondent deux éléments QQ_1 tels que le jet PQP_1Q_1 soit projectif au jet ordinaire abcd, et que le sens PQP_1 coïncide avec le sens ABA_1. Il y a aussi deux éléments homologues RR_1 tels que le jet PRP_1R_1 soit projectif à abcd mais que le sens PRP_1 soit opposé au sens ABA_1.

§7. Éléments imaginaires.

116. Si l'on associe à une figure uniforme en involution $AA_1.BB_1 .....$ qui n'a pas d'éléments d'ordre, un sens déterminé ABA_1 contenu dans cette figure, on a un élément imaginaire ABA_1B_1 de première espèce c.à.d. un point imaginaire, une droite imaginaire de première espèce ou un plan imaginaire, selon que la figure uniforme est un ensemble de points, un faisceau de rayons ou un faisceau de plans. Si l'on associe à la même figure en involution le sens opposé A_1BA, on obtient l'élément imaginaire A_1BAB_1 qui s'appelle conjugué du premier. De telles associations de deux concepts sont nommées éléments pour cette unique raison qu'ils remplacent souvent des éléments véritables ou réels.

Si l'on parle d'un élément imaginaire de première espèce ABA_1B_1, il va de soi que A, B, A_1, B_1 sont quatre éléments réels d'une même figure uniforme et que dans cette figure les éléments $A\,A_1$ sont séparés par les éléments B, B_1. L'élément imaginaire EFE_1F_1 coïncide avec le premier, de sorte que ABA_1B_1, EFE_1F_1 ne sont que deux représentations différentes d'un seul et même élément imaginaire, si la figure involutive $EE_1.FF_1 ....$ ~~coïncide avec la première~~ est identique à la figure involutive $ABA_1B_1 ....$ et si en outre le sens EFE_1 coïncide avec le sens ABA_1. Ainsi l'élément imaginaire ABA_1B_1 peut être représenté aussi par BA_1B_1A, A_1B_1AB, B_1ABA_1, et son conjugué A_1BAB_1, par BAB_1A_1, AB_1A_1B, B_1A_1BA.

117. Étant donné un système de l'espace en involution $aa_1, bb_1, \dots$ qui n'a ni point double, ni plan double (101 : geschaart-involutorisch) ni lignes doubles, si on lui associe un sens déterminé contenu dans le faisceau réglé $aa_1, bb_1, \dots$ on a une aba_1 droite imaginaire aba_1b_1, involutif de seconde espèce. Si l'on associe au même système le sens opposé, on obtient la droite a_1bab_1 conjuguée de la première.

Quand on parle d'une droite imaginaire de seconde espèce aba_1b_1, il est sous-entendu que a, b, a_1, b_1 sont quatre droites réelles du même faisceau réglé, et que dans le faisceau les droites a, a_1 sont séparées par les droites b, b_1. La droite imaginaire efe_1f_1 coïncide avec la première, de sorte que aba_1b_1, efe_1f_1 ne sont que des représentations différentes d'une même droite imaginaire, si le système involutif $ee_1, ff_1, \dots$ est identique au système involutif $aa_1, bb_1, \dots$ et si en outre le sens efe_1 coïncide avec le sens aba_1. Ainsi la droite imaginaire aba_1b_1 peut aussi être représentée par ba_1b_1a, a_1b_1ab, b_1aba_1, et la droite conjuguée a_1bab_1 par bab_1a_1, ab_1a_1b, b_1a_1ba.

Il n'y a pas d'autres éléments imaginaires que ceux qu'on vient de définir dans ces deux numéros.

118. Les représentations aba_1b_1, efe_1f_1 de deux éléments imaginaires, ou d'un seul et même élément imaginaire, sont dites projectives entre elles si les deux jets aba_1b_1, efe_1f_1 sont projectifs entre eux. Si un élément imaginaire est représenté par un jet harmonique aba_1b_1, cette représentation s'appelle harmonique. — Parmi toutes les représentations d'un seul et même élément imaginaire ghg_1h_1 qui partent d'un seul et même élément e, il y en a une et une seule qui soit

projective à une représentation donnée aba_1b_1, soit du même élément, soit d'un autre élément imaginaire, et par suite une seule, qui soit harmonique.

Si ghg_1h_1 est un élément imaginaire de première espèce, à chaque élément réel e qui appartient à la figure uniforme $gg_1\dots$ correspondent trois autres éléments réels e_1, f, f_1, tels que efe_1f_1 soit une représentation de l'élément imaginaire ghg_1h_1 projective à aba_1b_1.

Si ghg_1h_1 est une droite imaginaire de seconde espèce, ~~par~~ chaque droite réelle e qui n'est pas une directrice du système involutif $gg_1.hh_1\dots$ détermine trois autres droites réelles e_1, f, f_1, telles que efe_1f_1 soit une représentation de la droite imaginaire ghg_1h_1 projective à aba_1b_1. Toutes les directrices du système involutif $gg_1.hh_1\dots$ qui coupent la droite e appartiennent à un seul et même faisceau réglé, qui est le faisceau directeur (n°3) d'un faisceau réglé involutif $ee_1.ff_1\dots$ ~~qui~~ contenu dans le système.

119. Un élément imaginaire ABA_1B_1 est dit situé dans un élément réel a, si tous les éléments de la figure involutive $AA_1.BB_1\dots$ y sont situés. Tout point imaginaire est donc situé sur une droite réelle(3) et dans tout plan réel qui passe par cette droite.

Un élément imaginaire ABA_1B_1 est dit passer par un élément réel s, si tous les éléments de la figure involutive $AA_1.BB_1\dots$ y passent. Tout plan imaginaire passe donc par une droite réelle(4) et par tout point réel situé sur cette droite.

Toute droite imaginaire de première espèce est située dans un plan réel(1) et passe par un point réel(2), tandis qu'une droite imaginaire de seconde espèce ne passe par aucun point réel et n'est située dans aucun plan réel.

(1) le plan du faisceau de rayons en involution qui la représente.
(2) le centre de ce faisceau (add. de Lüroth)
(3) dite le porteur réel de ce point. (4) dite base réel de ce plan

Si un élément réel passe par l'un de deux éléments imaginaires conjugués, il passe aussi par l'autre.

Si un élément réel est situé dans l'un de deux éléments imaginaires conjugués, il est aussi situé dans l'autre.

120. On dit qu'un point imaginaire ABA_1B_1 est situé dans un plan imaginaire EFE_1F_1 soit quand l'axe réel du plan coïncide avec la droite réelle qui porte le point, soit quand la droite en involution $AA_1BB_1\ldots$ et le faisceau de plans en involution $EF_1FF_1\ldots$ sont en perspective, et qu'en outre les sens ABA_1 et EFE_1 concordent.

Un point imaginaire ABA_1B_1 et une droite réelle $\underline{s}$, non situés dans un même plan, déterminent un plan imaginaire $s(ABA_1B_1)$.

Un plan imaginaire EFE_1F_1 et une droite réelle $\underline{u}$, qui n'ont aucun point réel commun, se coupent en un p. imag. $u(EFE_1F_1)$

126. Deux points imaginaires situés dans un même plan réel mais non sur une même droite réelle déterminent une droite im. de 1re esp.

Deux plans imaginaires qui ont en commun un point réel, mais non une droite réelle, déterminent une droite imag. de 1re esp.

Deux droites imaginaires situées dans un même plan réel, mais n'ayant aucun point réel commun, se coupent en un point imaginaire.

Deux droites imaginaires qui passent par un même point réel sans être situées dans un même plan réel, déterminent un plan imaginaire.

127. Deux points imaginaires non situés dans un même plan réel, ou deux plans imaginaires n'ayant aucun point réel commun, déterminent une droite imaginaire de seconde espèce (v. Lüroth, 21.)

§ 8. 141. Chaque point imaginaire P non situé à l'infini détermine un jet harmonique ABCD, qui est sa représentation harmonique à partir du point A situé à l'infini sur la droite réelle qui le porte. On pourrait donc représenter le point imaginaire simplement par (B, D) et le point conjugué, qui est représenté harmoniquement, à partir du point à l'infini A, par ADCB, peut être simplement représenté par (D, B.) [Les 2 points B et D suffisent à déterminer la droite réelle, le point à l'infini A et son conjugué harmonique C.]

§ 9. Jets harmoniques.

142. Les trois points d'intersection des couples des côtés opposés d'un quadrilatère plan complet EFGH sont les trois sommets d'un triangle (même s'ils sont imaginaires.)(1)

La droite qui joint le point d'intersection A des côtés EF, GH ~~avec~~ et le point d'intersection C des côtés EH, FG coupe donc, même quand le quadrilatère EFGH est imaginaire, les côtés EG, FH en deux points distincts B, D, et le jet ABCD est harmonique. Si l'on convient de dire encore d'un jet harmonique imaginaire que le 1er et le 3e de ses éléments sont séparés par le 2e et le 4e, parce que cela est vrai de tout jet harmonique réel, il n'y a absolument rien à changer aux propositions contenues dans le § 8 de la G. de L. en prenant désormais le concept d'élément dans le sens général.

144. Si ABCD est un jet harmonique et si $A_1 B_1 C_1 D_1$ sont les éléments conjugués aux éléments A, B, C, D, le jet $A_1 B_1 C_1 D_1$ est aussi harmonique.

145. Deux éléments imaginaires conjugués L, L_1 de première espèce sont séparés harmoniquement par deux éléments correspondants (réels) quelconques A, A_1 de la figure involutive qui leur sert de base.

146. Trois droites a, b, c qui ne se rencontrent pas déterminent une quatrième droite d qui est leur quatrième harmonique.

147. Deux droites imaginaires conjuguées de seconde espèce sont séparées harmoniquement par deux droites réelles correspondantes a, a_1 du système involutif qui leur sert de base.

---

(1) C.à.d. ne sont pas en ligne droite.

148. Quatre éléments AA_1, BB_1, d'une même figure uniforme déterminent deux éléments M, N de cette figure qui sont séparés harmoniquement tant par les deux premiers que par les deux derniers des quatre éléments donnés.

Si les éléments donnés sont tous réels, M et N sont deux éléments réels ou imaginaires conjugués, selon que le sens ABA_1 concorde avec le sens AB_1A_1 ou lui est opposé. Si A, A_1 sont deux éléments imaginaires conjugués, et si B, B_1 sont deux éléments réels ou imaginaires conjugués, M et N sont réels.

§ 10. Éléments imaginaires homologues dans des figures fondamentales qui sont *réellement* projectives.

149. Si deux figures uniformes réelles sont en relation projective, à chaque élément imaginaire ABCD de l'une correspond ipso facto un élément imaginaire $A_1B_1C_1D_1$ de l'autre, puisqu'à chaque jet *ordinaire* réel ABCD de l'une correspond un jet *ordinaire* réel de l'autre. Si EFGH est une autre représentation de l'élément imaginaire ABCD, et si $E_1F_1G_1H_1$ est le jet qui correspond au jet EFGH, $E_1F_1G_1H_1$ est une autre représentation de l'élément imaginaire $A_1B_1C_1D_1$. A tout jet *harmonique* imaginaire de l'une des figures correspond un jet *harmonique* imaginaire de l'autre(1) (car, si deux figures projectives ne sont pas en perspective, elles peuvent se déduire l'une de l'autre par deux ou trois perspectives successives(2)). A deux éléments imaginaires conjugués de l'une correspondent deux éléments imaginaires conjugués de l'autre. Si les deux figures ont un élément imaginaire correspondant commun, elles ont aussi son conjugué correspondant commun. Si à l'élément imaginaire PQRS correspond l'élément imaginaire $P_1Q_1R_1S_1$, à l'élément réel P l'élément réel P_1, l'élément R_1 correspond à R

(1) Cf. Geom. d. Lage, n° 112. (2) Cf. Geom. der Lage, n° 103.

et si en outre les représentations des deux éléments imaginaires sont projectives entre elles, l'élément Q_1 correspond à Q, et S_1 à S.

§ 12. Éléments imaginaires dans des figures élémentaires réelles

175. Si la surface directrice (1) d'un système polaire réel passe par la droite réelle a et par la droite imaginaire $abcd$, elle passe aussi par les droites réelles b, c, d. Car si au jet $abcd$ correspondait un jet différent $ab_1c_1d_1$, à la droite imaginaire $abcd$ correspondrait une autre droite imaginaire $ab_1c_1d_1$, ce qui est contre l'hypothèse.

Une droite réelle a et une droite imaginaire u, qui ne la coupe pas, déterminent un faisceau réglé réel, qui contient les deux droites données, et qui contient aussi les droites réelles b, c, d, si $abcd$ est une représentation de la droite imaginaire u ....

176. Une courbe réelle du second ordre K et une droite réelle p, située dans son plan, mais non tangente, déterminent un ensemble involutif de points AA_1BB_1.... sur la courbe, dont la droite p est base de involution et son pôle P le centre d'involution. Si la courbe K et la droite p se coupent en 2 points imaginaires EFE_1F_1, EF_1E_1F, et si le sens ABA_1 concorde avec le sens EFE_1, le point imaginaire EFE_1F_1 peut être représenté, en tant que point de la courbe K, par ABA_1B_1, et le point conjugué par AB_1A_1B ; et l'on peut dire que l'on obtient l'un ou l'autre de ces points d'intersection de la courbe K avec base d'involution ~~du système~~ de la figure involutive AA_1BB_1...., selon que l'on associe à cette figure le sens ABA_1 ou le sens AB_1A_1.

177. Tout élément imaginaire, contenu dans une figure élémentaire réelle, peut être représenté par quatre éléments réels de cette figure de telle sorte que cette représentation parte d'un élément réel donné de la figure et soit projective à un jet ordinaire donné.

(1) Surface réglée lieu des droites qui se correspondent à elles-mêmes.

[On peut répéter ici des figures élémentaires ce qui a été dit des figures uniformes n° 129.]

Anhang.

190. Dans une gerbe de rayons rectangulaire, deux éléments correspondants imaginaires seront encore dits perpendiculaires. A chaque rayon imaginaire $a b a_1 b_1$ correspond un plan imaginaire $A B A_1 B_1$ dont la trace réel est perpendiculaire au plan réel qui porte la droite imaginaire. Si les droites a_1 b_1 sont respectivement perpendiculaires aux droites a, b, la droite imaginaire est située dans le plan qui lui correspond, de sorte que chacun de ces éléments est aussi perpendiculaire à lui même. Tout faisceau réel de premier ordre, double centre au base n'est pas à l'infini, contient ainsi deux éléments imaginaires conjugués dont chacun est perpendiculaire à lui même. Ces deux éléments imaginaires conjugués ne sont par autre chose que les éléments de ordre d'un faisceau rectangulaire (involutif).

191. Si deux faisceaux de rayons congruents $abc\ldots$, $a_1 b_1 c_1 \ldots$ situés dans un même plan et ayant leur centre commun (dans le fini) sont décrits dans le même sens, ils ont deux rayons imaginaires conjugués correspondants communs dont chacun est perpendiculaire à lui même.

Si l'on fait correspondre entre eux les deux points à l'infini sur deux rayons perpendiculaires on établit sur la droite de l'infini un système involutif de points; les points de ordre (points doubles) de cette involution sont projetés, depuis tout point réel dans le fini, par deux rayons imaginaires conjugués, dont chacun est perpendiculaire à lui même; on les appelle points normaux du plan. ~~Si la courbe de ordre d'un système polaire réel du plan contient ces deux points, elle est un cercle et alors tous ses diamètres conjugués sont perpendiculaires.~~ Les cercles concentriques ~~se touchent aux deux~~ points normaux du plan

Si deux systèmes plans semblables sont (situés dans un même plan
mais non en perspective, ils ont en commun un point dans
le fini et deux points à l'infini. Ceux-ci et correspondants sont les deux points
normaux du plan si les angles homologues sont de même sens
ou deux points réels séparés harmoniquement par les points
normaux, si les angles homologues sont en sens contraire.

192. Le faisceau de rayons du second ordre que forment les
tangentes d'une parabole contient deux rayons imaginaires,
dont chacun est perpendiculaire à lui-même, et qui se coupent
en un point réel, le *foyer* de la parabole. Si la courbe d'ordre
d'un système polaire réel plan a deux points à l'infini, et si ces
deux points sont les points normaux, la courbe est un cercle car
tous ses diamètres conjugués sont perpendiculaires entre eux;
sinon, elle a quatre tangentes dont chacune est perpendiculaire
à elle-même; les deux points réels de ces quatre droites
imaginaires sont les *foyers* de la courbe.

Des cercles concentriques situés dans un même plan se touchent
aux points normaux du plan.

193. Deux faisceaux de rayons congruents, situés dans un
même plan ~~engendrent~~ et qui n'ont aucun rayon correspondant
commun, engendrent (par les intersections de leurs rayons homologues)
soit un cercle, soit une hyperbole équilatère, selon qu'ils sont
décrits dans le même sens ou en sens contraire.

194. La surface d'ordre d'une gerbe de rayons rectangulaire est telle,
que toute droite qui y est située et tout plan qui lui est tangent,
est perpendiculaire à soi-même. La courbe imaginaire suivant laquelle
le plan de l'infini est coupé par toutes les surfaces coniques analogues
s'appelle <u>cercle normal</u>. Toute surface du second ordre qui passe par
le cercle et qui n'est pas une surface conique, est une surface sphérique,
car tous ses diamètres conjugués sont perpendiculaires entre eux. De plus
toute droite située dans une surface sphérique est perpendiculaire à elle-même.

§ 14. Du sens.

196. Si P, Q, R, S sont quatre éléments d'une même figure uniforme ou bien S est situé dans le sens PQR (QRP, RPQ) ou bien il est situé dans le sens contraire RQP, ou bien il est neutre par rapport aux deux sens opposés.

197. Deux jets $PQRS$, $P_1Q_1R_1S_1$ sont dits de même espèce, à l'égard du sens, quand S se comporte par rapport au sens PQR comme S_1 par rapport au sens $P_1Q_1R_1$. Si S est neutre par rapport au sens PQR (ou au sens RQP) le jet $PQRS$ est dit neutre. De même pour le jet $P_1Q_1R_1S_1$.

198. Quand deux systèmes de l'espace sont en relation projective réelle, deux jets homologues quelconques sont de même espèce quant au sens.

204. Si les éléments P, Q, R, S d'une même figure uniforme ont pour conjugués $P_1Q_1R_1S_1$, les deux jets $PQRS$, $P_1Q_1R_1S_1$ sont de même espèce quant au sens.

205. Si P, Q, R, S sont quatre éléments d'une même figure uniforme les jets $PQRS$, $QPSR$ sont de même espèce quant au sens. — ~~L'élément S~~ Si l'élément S est situé dans le sens PQR, l'élément R est situé dans le sens QPS, Q dans le sens RSP, et P dans le sens SRQ.

§ 15. Des chaînes.

206. Trois éléments P, Q, R d'une même figure uniforme y déterminent une chaîne PQR.... qui est l'ensemble de tous les éléments de cette figure qui sont neutres par rapport au sens PQR. 207. Un élément de cette figure qui n'appartient pas à la chaîne PQR.... est dit situé d'un côté ou de l'autre de cette chaîne, suivant qu'il est situé dans le sens PQR ou dans le sens RQP.

214. Si deux figures uniformes se correspondent de telle manière qu'à chaque élément de l'une corresponde un élément de l'autre, à chaque jet neutre de l'une un jet neutre de l'autre, et par suite, à chaque chaîne de l'une une chaîne de l'autre, alors à chaque jet harmonique de l'une correspond un jet harmonique de l'autre.

A chaque jet ordinaire de l'une correspond un jet ordinaire de l'autre.

§ 16. Relation projective entre figures uniformes.

215. On dira maintenant que deux figures uniformes sont projectives entre elles, si elles se correspondent de telle manière qu'à chaque élément de l'une corresponde un élément de l'autre et si de plus deux jets homologues sont de même espèce quant au sens. Il en résulte (214) qu'à chaque jet harmonique de l'une correspondra un jet harmonique de l'autre.

[Toutes les propositions du § 9 de la Geom. d. Lage se trouvent étendues aux figures réelles et imaginaires, grâce au sens général du mot élément.]

216. Si deux figures uniformes réelles sont projectives, et si à trois éléments réels de l'une correspondent trois éléments réels de l'autre, ces figures sont en relation projective réelle.

§ 17. Relation projective entre des systèmes.

226. Si l'on entend par élément les éléments imaginaires aussi bien que réels, deux figures fondamentales du second degré ou deux systèmes de l'espace ne peuvent être dits projectifs (collinéaires ou réciproques) que si non seulement les conditions énoncées (G d L n° 121) sont remplies, mais en outre deux jets homologues (uniformes) quelconques sont de même espèce quant au sens et par suite deux figures uniformes homologues sont projectives entre elles. — Il n'y a d'ailleurs rien à changer au § 10 de la Geom. d L. le mot élément étant pris dans son sens étendu.

§ 18. Relation projective entre figures élémentaires

234. Si P, Q, R, S sont quatre éléments d'une même figure élémentaire du second ordre, et p, q, r, s les éléments correspondants d'une figure uniforme, qui est projective avec la première, on convient de dire que l'élément S se comporte à l'égard du sens PQR comme l'élément s à l'égard du sens pqr.

238. Si deux jets sont projectifs, leurs conjugués le sont aussi.

239. Deux jets neutres conjugués $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$ sont projectifs. — Si au contraire $ABCF$, $A_1B_1C_1F_1$ sont deux jets conjugués non neutres, et si F est séparé de G par la chaîne $ABC\ldots$ et F_1 du conjugué G_1 de G par la chaîne $A_1B_1C_1\ldots$ harmoniquement, alors les jets $ABCF$ et $A_1B_1C_1G_1$, $ABCG$ et $A_1B_1C_1F_1$ sont respectivement projectifs.

§ 19. Sommes de jets.

256. Désormais les jets projectifs entre eux seront considérés comme égaux, et l'on dira d'un jet qu'il est déterminé, si l'on donne un jet ~~projectif~~ quelconque qui lui est projectif (égal).
Si l'on parle d'un jet propre (eigentlich), on entend par là que les ~~quatre~~ éléments de ce jet (abcd) sont ~~des~~ quatre éléments distincts d'une même figure élémentaire. L'ensemble de trois éléments différents d'une telle figure, dont ~~on répète~~ l'un est écrit deux fois, s'appellera jet impropre (uneigentlich):

de première espèce: abca, baac
de deuxième espèce: abcb, babc
de troisième espèce: abcc, ccab

Bien que les jets ABCA, baac ne soient pas projectifs, tous les jets impropres de même espèce seront considérés comme égaux: et représentés, ceux de première espèce, par 0;
ceux de deuxième espèce, par 1;
ceux de troisième espèce, par ∞.
Tout jet impropre est un jet neutre.

257. Tout jet neutre est conjugué à lui-même (239.)
Quel que soit le jet ABCD, on a identiquement:

$$ABCD = BADC = CDAB = DCBA. \qquad (24.)$$

258. Si l'on donne deux jets V et V_1, et trois éléments ABC d'une figure élémentaire, on détermine trois autres éléments D, D_1, et S, tels que l'on ait:

$$ABCD = V, \qquad ABCD_1 = V_1,$$

et que dans la figure involutive $CC.DD_1,\ldots$ l'élément S corresponde à l'élément A. Le jet ABCS ainsi obtenu est la somme des jets ABCD, $ABCD_1$, c.à.d: $V+V_1$.
Les deux jets V et V_1 déterminent un seul jet: $V+V_1$.

Il est évident que : $V + V_1 = V_1 + V$

Si D coïncide avec A, S coïncide avec D_1. Donc quand l'un des deux jets est égal à 0, leur somme est égale à l'autre.

260. Si les jets $V_1\ V_2 \dots V_n$ sont les conjugués des jets $V_1\ V_2 \dots V_n$, la somme des $\underline{n}$ V est conjuguée à la somme des $\underline{n}$ V.

La somme de jets neutres est un jet neutre.

La somme de deux jets conjugués est un jet neutre

261. Deux jets V, V_1 déterminent un jet V_2 tel que

$$V = V_1 + V_2$$

Qu'on prenne dans une figure élémentaire trois ~~points~~ éléments A, B, C, et qu'on cherche les ~~points~~ éléments S, D, E tels que

$$ABCS = V, \qquad ABCD = V_1$$

et que l'élément E corresponde à D dans l'involution $CC.AS\dots$ Si l'on pose : $ABCE = V_2$, on a :

$$ABCS = ABCD + ABCE \quad \text{ou:} \quad V = V_1 + V_2.$$

Le point E, et le jet $ABCE$, est d'ailleurs le seul.

Si V et V_1 sont ~~neutres~~ parfaits, V_2 est un jet neutre.

Si $V_1 + V_2 = V_1 + V_2$, et si : $V_1 = V_1$, $V_2 = V_2$.

262. La somme de deux jets $ABCD$, $BACD$, dont l'un se déduit de l'autre par la permutation des deux premiers ou des deux derniers éléments, est un jet impropre de seconde espèce $(= 1.)$

Si dans l'involution $CC.AB\dots$ les éléments D, E sont correspondants, $ABCD + ABCE = ABCB = 1$; or :

$$ABCE = BACD = ABDC.$$

[262. Deux jets dont la somme est égale à zéro sont dits opposés.

Si $CC.BD.AE$ est une involution, $DECA + EDCB = ABCA = 0$.

263. Etant donné une involution $CC.BD.AE$ et un p. P dans la même figure on a : $ABCP + EDCP = ABCE = EDCA$,

$ABCP = DECP + ABCD = DECP + EDCB$.

266. La somme de m jets dont chacun est égal à V, s'appelle un multiple de V et s'écrit : mV.

267. Trois éléments réels C, A, A_1 d'une figure élémentaire réelle G déterminent une suite d'éléments réels $A_2, A_3, A_4, \ldots$ tels que CAA_1A_2, $CA_1A_2A_3$, $CA_2A_3A_4, \ldots$ soient des jets harmoniques, et tels que deux éléments consécutifs de la suite, si loin qu'on la prolonge, ne soient jamais séparés dans G par des éléments antérieurs. Si B est un élément qcque distinct de A, on a :

$$ABCA_m = m(ABCA_1)$$

Si l'on détermine l'élément B de telle sorte que $ABCA_1 = V$, on aura :

$$ABCA_m = mV.$$

Le jet AA_1CA_m est égal à m fois le jet $\frac{1}{AA_1CA_1=1}$ ou à m ; le jet 1 est égal à m fois le jet AA_mCA_1 (car $AA_mCA_m = 1$.)

§ 20. Produits de jets.

268. Trois éléments M, A, N d'une figure élémentaire et deux jets V_1, V_2 dont aucun n'est égal à 0 ou à ∞, déterminent deux éléments A_1, A_2 de la figure, ~~de~~ tels que :

$$MANA_1 = V_1 \qquad MA_1NA_2 = V_2$$

Le jet $MANA_2$ ~~est~~ s'appelle le produit des jets $V_1 V_2$, et s'écrit : $V_1 . V_2$.
Le jet V_1V_2 est bien déterminé (d'une façon univoque) par les jets V_1, V_2.

$$V_2V_1 = NA_2MA = MANA_2 = V_1V_2.$$

Si l'un des ~~jets~~ facteurs est égal à 1 (jet impropre de deuxième espèce) le produit est égal à l'autre.

269. Produit de n jets $V_1, V_2 \ldots V_n$ (~~dont aucun n'est nul ou infini~~).

$$MANA_1 = V_1 \qquad MA_1NA_2 = V_2 \;\ldots\ldots\; MA_{n-1}NA_n = V_n$$

$$MANA_n = V_1V_2 \ldots V_n.$$

Si l'un ~~des~~ facteurs est égal à 0 (jet impropre de première espèce) le produit est égal à 0.

Si les jets $V, V_2 \ldots V_n$ sont les conjugués des jets $V_1 V_2 \ldots V_n$, le produit des premiers est le conjugué du produit des seconds. Tout produit de jets neutres est lui-même un jet neutre.

270. Si le produit de deux jets est égal à 1, chacun est dit l'inverse de l'autre. MANA, a pour inverse MA, NA = NAMA. Si deux jets inverses sont égaux, ils sont tous deux ou bien des jets impropres de deuxième espèce (+1) ou bien des jets harmoniques (−1.)

271. Deux jets V, V_1 dont le second n'est pas égal à 0, déterminent un jet V_2, tel que: $V = V_1 . V_2$.

272. Si MN.AD.BC est une involution, c.à.d. MANC = NDMB = MBND, on a: MANB × MANC = MAND.

Le m^e multiple $ABCA_m$ d'un jet ABCA, est le produit de ce jet par le jet AA, CA_m qui est égal à m fois le jet 1

273. Le produit de deux jets conjugués V, V est un jet neutre.

276. Deux jets donnés V, V déterminent deux jets ABCP, ABCQ dont la somme est égale à V et le produit égal à V.

277. Si V, V, V_1, V_1 sont des jets neutres, et J un jet non neutre tel que: $V + VJ = V_1 + V_1 J$, on a: $V = V_1$ et $V = V_1$.

278. Un jet non neutre J et un jet qcque W déterminent deux jets neutres V, V tels que: $W = V + VJ$.

§ 21. Puissances de jets.

279. Le produit de m jets égaux à V s'appelle la $m$me puissance de V et s'écrit : V^m.
Toute puissance de 0 est 0 ; de 1 est 1 ; d'un jet neutre est un jet neutre.

280. Si $MN.AC.BB$ est une involution, on a :
$(MANB)^2 = MANB \times MBNC = (MBNC)^2 = MANC$.
Si $MANB$ est un jet harmonique, $(MANB)^2 = 1$.
Le produit d'un jet harmonique $ABCD$ par un jet qcque $ABCP$ est l'opposé (le symétrique) de celui-ci.

281. Si $MANA_1$ est un jet propre et neutre, tels que les éléments M, N ne soient pas séparés par A, A_1, aucune puissance de ce jet n'est égale à une autre, ni par suite égale à 1.

282. Si une puissance qcque V^m d'un jet V est égale à 1, le jet V conjugué de V est en même temps son inverse.

283. A chaque jet $MANC$, non nul, correspondent deux jets opposés $MANB$, $MANB_1$, tels que : $(MANB)^2 = (MANB_1)^2 = MANC$.

284. Si M, N, A, B, A_1, B_1 sont six points d'une courbe du second ordre, et S le point d'intersection des droites AA_1, BB_1, le jet $S(MANB)$ est le produit des 2 jets contenus dans la courbe :
$MANB$, MA_1NB_1.
En effet, soient A_2, B_2, C les points où MN coupe AA_1, BB_1, A_1B.
$S(MANB) = MA_2NB_2 = MA_2NC \times MCNB_2$. Or on voit que :
$MA_2NC = A_1(MANB) = MANB$, $MCNB_2 = B(MA_1NB_1) = MA_1NB_1$.

289. A chaque jet neutre V non nul correspondent un jet neutre V et deux jets non neutres conjugués V_1, V_2 tels que : $V^3 = V_1^3 = V_2^3 = V$.

290. A chaque jet non neutre V, qui est l'inverse de son conjugué, correspondent 3 jets de même nature V, V_1, V_2, tels que

$$V^3 = V_1^3 = V_2^3 = V.$$

291. A tout jet non nul V correspondent 3 jets V, V_1, V_2, tels que:

$$V^3 = V_1^3 = V_2^3 = V.$$

§ 22. Points et tangentes communs à deux courbes du second ordre

297. Dans chaque figure élémentaire trois éléments A, B, C en déterminent deux autres P, Q tels que $ABPQ$, $CBQP$ soient des jets harmoniques.

§ 27. De la valeur des jets neutres.

393. Chaque jet neutre $\underline{abcd}$ détermine un nombre, qu'on peut appeler sa valeur. Étant donnés 2 points réels et propres A, B et le point à l'infini C sur ~~cette~~ la droite AB, on cherche le point D tel que: $ABCD \,\pi\, \underline{abcd}$, et l'on considère le quotient $\frac{AD}{AB}$ comme positif ou négatif, suivant que les segments finis AB, AD sont de même sens ou de sens contraire; le nombre ainsi déterminé s'appellera la valeur du jet $\underline{abcd}$.

Si $\underline{abcd}$ est un jet neutre et propre, sa valeur sera négative, si dans la chaîne $\underline{abc}$.... les éléments $\underline{a}, \underline{c}$ sont séparés par $\underline{b}, \underline{d}$; positive et < 1, si les éléments $\underline{a}, \underline{b}$ sont séparés par $\underline{c}, \underline{d}$; positive et > 1, si les éléments $\underline{a}, \underline{d}$ sont séparés par $\underline{b}, \underline{c}$.

Si $\underline{abcd}$ est un jet impropre, il a pour valeur 0, 1 ou ∞, suivant que le point D coïncide avec A, avec B ou avec C.

394. Deux jets neutres et propres ont des valeurs égales ou inégales suivant qu'ils sont projectifs ou non. Si un jet est la somme de jets neutres, sa valeur est la somme arithmétique de leurs valeurs;

si un jet est le produit de jets neutres, sa valeur est le produit arithm. de leurs valeurs.

395. Si A, B, C, D sont quatre points réels propres d'une droite, la valeur du jet $ABCD$ est : $\frac{AD}{AB} \cdot \frac{CB}{CD}$ (ou : $\frac{AD}{AB} : \frac{CD}{CB}$)

396. Si a, b, c, d sont quatre droites réelles situées dans un même plan et passant par un même point S à distance finie (propre), on a :
$$\underline{abcd} = \pm \frac{\sin(ad)\,\sin(cb)}{\sin(ab)\,\sin(cd)}$$
avec le signe $-$ ou $+$ suivant que les droites $\underline{a}, \underline{c}$ sont séparées, ou non, par les droites $\underline{b}, \underline{d}$.

397. La valeur de tout jet harmonique est -1.
Le jet dont la valeur est q a pour opposé le jet dont la valeur est $-q$.

§ 28. Nombres complexes.

398. Un jet $MANB$, dont le carré est un jet harmonique (égal à -1) sera désigné par $+i$ ou $-i$, suivant que son 4e élément B est situé dans le sens MAN ou dans le sens NAM. En effet, si $MANC$ est un jet harmonique, les éléments de ordre B, B_1 de l'involution : $MN.AC\ldots$ sont situés de côtés opposés de la chaîne $MAN\ldots$. Si donc B se trouve dans le sens MAN, B_1 se trouvera dans le sens NAM, et l'on aura : $MANB = +i$, $MANB_1 = -i$;
$$(MANB)^2 = (MANB_1)^2 = MANC = -1.$$

399. Tout jet W non égal à ∞ détermine deux jets neutres U, V tels que : $W = U + Vi$ (278.) Si $\underline{u}$ est la valeur de U, $\underline{v}$ la valeur de V, la valeur de W sera : $u + vi$.
C'est le nombre complexe qui correspond au jet W.
Quand $v \neq 0$, il s'appelle nombre imaginaire. Quand $v = 0$, il se réduit au nombre réel $\underline{u}$.

400. Pour construire un jet dont la valeur soit égale à $u+vi$, on marque deux points réels et propres A, B, le point à l'infini C sur la droite AB, et l'on cherche les points D, F, F_1, tels que

$$\frac{AD}{AB} = u, \qquad \frac{DF}{AB} = v \qquad \frac{DF_1}{AB} = -v$$

Si l'on désigne par P le point imaginaire qui a pour représentation harmonique $DFCF_1$, et par P_1 le point conjugué $CFDF_1$, on a $ABCP = u+vi$, $\quad ABCP_1 = u-vi$.

En effet, soit E le point homologue de A dans l'involution $CC, BD, \ldots$ on a $\overset{(263)}{}$ $ABCP = ABCD + DECP = ABCD + (DECF)(DFCP)$

Or $ABCD = \frac{AD}{AB} = u$, $\quad DECF = \frac{DF}{DE} = \frac{DF}{AB} = v \quad DFCP = i$

Donc $ABCP = u+vi$. De même $ABCP_1 = ABCD + (DECF_1)(DF_1CP_1) = u-vi$

401. Les propositions établies n° 394 pour les jets neutres sont aussi valables pour les jets non neutres, si l'on considère les nombres complexes comme des binomes, que l'on associe, dans l'addition, les parties semblables et que l'on remplace, dans la multiplication, i^2 par sa valeur -1. On a donc (259, 269, 274) :

$$(u+vi) + (u_1+v_1 i) = (u+u_1) + (v+v_1)i$$
$$(u+vi)(u_1+v_1 i) = (uu_1 - vv_1) + (uv_1 + u_1 v)i$$

402. Soient B, Q, R trois points réels d'un cercle, l'un des deux points imaginaires M où le cercle coupe la droite de l'infini est dans le sens BQR; l'autre N dans le sens BRQ. Si l'on désigne l'arc BQ par φ, la valeur du jet $MBNQ$ est

$$\cos\varphi + i\sin\varphi$$

En effet, soit A le centre du cercle, C le point à l'infini sur AB, CF, DF ~~la rep~~ représentation harmonique du point imaginaire P où la dr. AB coupe la dr. QM; DQ est perpendiculaire à AB : on a $F_1D = DQ = DF$, donc $\frac{AD}{AB} = \cos\varphi$, $\frac{DF}{AB} = \sin\varphi$. Or

$$MBNQ = M(MBNQ) = ABCP = \cos\varphi + i\sin\varphi. \quad [400]$$

Si l'on désigne par ψ l'autre arc QR, la valeur du jet MQNR est :
$$\cos\psi + i\sin\psi$$
et la valeur du jet MBNR sera :
$$\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)$$
Or $MBNR = MBNQ \times MQNR$. Donc :
$$\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi) = (\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\psi + i\sin\psi)$$
403. Si ABCD est un jet propre ayant pour valeur q, nombre réel ou complexe, on a :
$$BACD = 1-q, \quad CBAD = \frac{1}{q}, \quad BCAD = 1-\frac{1}{q} = \frac{q-1}{q},$$
$$CABD = \frac{1}{1-q}, \quad ACBD = \frac{q}{q-1}.$$

§ 29. Des abscisses.

404. Si l'on prend dans une figure élémentaire 3 éléments A, B, C, que l'on pose 0 pour abscisse du premier, 1 pour abscisse du second, ∞ pour abscisse du troisième, on entend par abscisse d'un quatrième élément P de la figure la valeur du jet ABCP. — Les trois éléments fixes déterminent ainsi un système d'abscisses (A, B, C) contenu dans la même figure. Si dans ce système l'abscisse de P est x, elle sera dans le système (B, A, C) : $1-x$; dans le système (C, B, A) : $\frac{1}{x}$, etc.

405. Si $P_1\, P_2\, P_3\, P_4$ sont quatre éléments quelconques d'une figure élémentaire, $x_1\, x_2\, x_3\, x_4$ leurs abscisses, la valeur du jet $P_1P_2P_3P_4$ est :
$$\frac{x_1-x_4}{x_1-x_2}\cdot\frac{x_3-x_2}{x_3-x_4}$$
En effet, $ABCP_1 \times AP_1CP_4 = ABCP_4 = x_4$; $ABCP_1 = x_1$; donc $AP_1CP_4 = \frac{x_4}{x_1}$; $P_1ACP_4 = \frac{x_1-x_4}{x_1}$, $P_1ACP_2 = \frac{x_1-x_2}{x}$; $P_1ACP_4 = P_1ACP_2 \times P_1P_2CP_4$; donc
$P_1P_2CP_4 = \frac{x_1-x_4}{x_1-x_2}$; $CP_2P_3P_4 = P_3P_4CP_2 = \frac{x_3-x_2}{x_3-x_4}$

$P_1P_2P_3P_4 = P_1P_2CP_4 \times CP_2P_3P_4 = \frac{x_1-x_4}{x_1-x_2}\cdot\frac{x_3-x_2}{x_3-x_4}$

Si $x_1 = 0$, $P_1P_2CP_4 = \frac{x_4}{x_2}$.
Si $x_1 = \infty$, $P_1P_2CP_4 = 1$.

406. Si l'on prend dans une figure élémentaire deux systèmes d'abscisses (A, B, C) et (E, F, G), a, b, c étant les abscisses des éléments A, B, C dans le second, et e, f, g les abscisses des éléments E, F, G dans le premier ; soient x l'abscisse d'un élément P dans le premier, y son abscisse ds le second on a :

$$x = \frac{b-c}{b-a} \cdot \frac{y-a}{y-c}, \qquad y = \frac{f-g}{f-e} \cdot \frac{x-e}{x-g}$$

En particulier :

$$e = \frac{b-c}{b-a} \cdot \frac{a}{c}, \qquad f = \frac{b-c}{b-a} \cdot \frac{1-a}{1-c}, \qquad g = \frac{b-c}{b-a}$$

$$a = \frac{f-g}{f-e} \times \frac{e}{g}, \qquad b = \frac{f-g}{f-e} \cdot \frac{1-e}{1-g}, \qquad c = \frac{f-g}{f-e}$$

Trois éléments E, F, G d'une figure élémentaire et trois nombres complexes, e, f, g donnés déterminent dans cette figure un système d'abscisses (A, B, C) par rapport auquel les abscisses de E, F, G sont respectivement e, f, g.
Soit x l'abscisse d'un élément qcque P, et y la valeur du jet $EFGP$, on a :
$$y = \frac{f-g}{f-e} \cdot \frac{x-e}{x-g}$$
d'où :
$$x = \frac{gy(f-e) - e(f-g)}{(f-e)y - (f-g)}$$

407. Étant donnés deux figures élémentaires, et dans chacune un système d'abscisses quelconque ; soit x l'abscisse d'un élément P de la première, x_1 l'abscisse d'un élément P_1 de la seconde. Si l'on fait correspondre les deux points P et P_1 dont les abscisses vérifient l'équation :
$$\alpha x x_1 - \beta x - \gamma x_1 + \delta = 0 \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0)$$
les deux figures sont en relation projective.

En effet si l'on prend ds la 2e fig. les éléments A_1, B_1, C_1 qui ont pour abscisses $\frac{\delta}{\gamma}, \frac{\beta-\delta}{\alpha-\gamma}, \frac{\beta}{\alpha}$, $(A_1B_1C_1P_1) = \frac{\gamma x_1 - \delta}{\alpha x_1 - \beta} = x$.
Les jets $ABCP$, $A_1B_1C_1P_1$ sont égaux, donc les fig. sont projectives
$(ABC\ldots\ A_1B_1C_1\ldots)$

408. Si deux figures élémentaires situées l'une dans l'autre sont en relation projective de telle sorte qu'aux éléments A B C de la 1re correspondent les éléments A, B, C_1 de la 2e ayant pour abscisses, dans le système (A, B, C) les nombres: $\frac{\delta}{\gamma}$, $\frac{\beta-\delta}{\alpha-\gamma}$, $\frac{\beta}{\alpha}$,

Si x, x_1 sont les abscisses (dans le même système) de deux points homologues P, P_1, on a: $x_1 = \frac{\beta x - \delta}{\alpha x - \gamma}$ donc:

$$\alpha x x_1 - \beta x - \gamma x_1 + \delta = 0 \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma \gtrless 0.)$$

Si: $(\beta+\gamma)^2 - 4\alpha\delta \gtrless 0$, les deux figures ont 2 éléments correspondants communs.

Si: $(\beta+\gamma)^2 - 4\alpha\delta = 0$ (sans qu'aucun des nombres α, $\beta+\gamma$, δ soit nul) les deux figures ont 1 élément correspondant commun

Si: $\alpha = \beta + \gamma = \delta = 0$, les deux figures ont tous leurs éléments communs et correspondants.

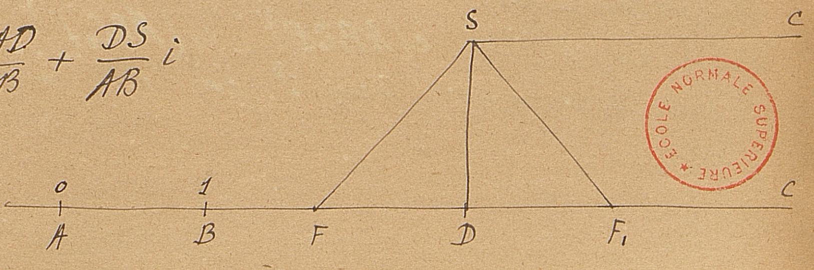
Pour que les figures soient en involution, il faut et il suffit que:

$$\beta = \gamma.$$

410. Si l'on prend sur une droite b pour point 0 le point A, pour point 1 un autre point B, et pour point C le point à l'infini; et si l'on considère, dans un plan H passant par cette droite l'un des points normaux (circulaires) M, chaque point P de la droite détermine un point réel S du plan situé sur la droite MP. Si P est réel, S coïncide avec P; si P est imaginaire S est d'un côté ou de l'autre de la droite b, suivant que P est ds le sens ABC ou BAC.

Soit CF, DF la représentation harmonique de P, issue de C, et $S(CF, DF)$ la représentation harmonique de la droite imaginaire SM (perp. à elle-même), la droite SD (perp. à SC et à H) est bissectrice de l'angle droit F_1SF, donc: $F_1D = DS = DF$. L'abscisse de P est:

$$\frac{AD}{AB} + \frac{DF}{AB}\, i = \frac{AD}{AB} + \frac{DS}{AB}\, i$$



Soient P, P_1, Q, Q_1 quatre points de la droite h ; $S\,S_1\,T\,T_1$ les quatre points correspondants du plan H (points réels des droites imaginaires MP, MP_1, MQ, MQ_1).

Si $P\,P_1\,Q\,Q_1$ appartiennent à une chaîne (c. à d. si leur rapport anharmonique : $\dfrac{(p-q_1)(q-p_1)}{(q-q_1)(p-p_1)}$ est un n. réel) $S\,S_1\,T\,T_1$ sont sur une droite ou sur un cercle $\left(PP_1QQ_1 \barwedge SS_1TT_1\right)$.

411. Quatre points A, B, C, C_1 d'un plan (dont 3 quelconques ne sont pas en ligne droite) déterminent un système de coordonnées plan. Tout point P extérieur à la dr. CC_1 est déterminé par ses ~~du~~ rayons vecteurs issus de C et C_1. ~~Les co~~ Ses coordonnées sont les valeurs des jets : $C_1(ABCP)$, $C(ABC_1P)$.

Cinq points A, B, C, C_1, C_2 (dont 4 quelconques ne sont pas dans un même plan) déterminent un système de coordonnées de l'espace. Les droites $C_1C_2 = c$, $C_2C = c_1$, $CC_1 = c_2$ sont les axes de projection du système. Tout point P extérieur au plan CC_1C_2 ~~et~~ déterminé par les 3 plans projetants ~~menés des~~ passant par les droites c, c_1, c_2 (PC_1C_2, PC_2C, PCC_1). Les coordonnées sont les valeurs des jets :

$$c(ABCP), \quad c_1(ABC_1P), \quad c_2(ABC_2P)$$

qui déterminent ces 3 plans. Le point A est le point O (origine) ; le point B a pour coordonnées $1, 1, 1$. Si les 5 points sont réels et si les 3 derniers sont à l'infini on a le système ordinaire (cartésien).

De même cinq plans A, B, C, C_1, C_2 (dont 4 quelconques ne passent pas par un même point) déterminent un système de coordonnées pour plans. Si l'on désigne les droites C_1C_2, C_2C, CC_1 par c, c_1, c_2, les coordonnées d'un plan P qui ne passe pas par le point $Cc\,(CC_1C_2)$ sont les valeurs des jets : $c(ABCP)$, $c_1(ABC_1P)$, $c_2(ABC_2P)$. qui déterminent le plan P par les 3 points où il coupe les droites c, c_1, c_2.

Lüroth –

Les imaginaires en Géométrie

Das Imaginäre in der Geometrie und das Rechnen mit Würfen. Darstellung und Erweiterung der v. Staudt'schen Theorie, von J. Lüroth in Carlsruhe

ap. Mathematische Annalen, t. VIII (1875)

La nécessité de généraliser les théorèmes et de lever les exceptions justifie les nombres imaginaires comme précédemment les nombres fractionnaires, négatifs et irrationnels (cf. Préface aux Beiträge de Staudt) [Cette nécessité manque pour justifier l'introduction des quaternions.]

La Géométrie analytique admet les valeurs imaginaires au même titre que les valeurs réelles et continue à leur donner les mêmes noms géométriques. Mais ce n'est plus de la Géométrie proprement dite, puisque ces valeurs imaginaires manquent de ~~représentation~~ figures réelles qui les représentent. Il faut trouver des figures géométriques qui puissent servir de substratum réel aux points, droites, etc. imaginaires.

D'autre part, la Géométrie pure doit aussi inventer des figures imaginaires, pour atteindre à la même généralité que la Géométrie analytique. Il semble qu'elle ait pour cela plus de liberté que celle-ci (car, analytiquement, un point imaginaire ne peut être représenté que par l'ensemble de 6 nombres réels.) Mais il faut que les points, droites et plans imaginaires conservent une certaine ~~l'~~analogie avec les points, droites et plans réels, de manière à en généraliser et uniformiser les propriétés et à ne pas créer de nouvelles exceptions : ainsi trois plans doivent déterminer un point, et trois points un plan, etc. Il faut ensuite se demander si les imaginaires introduits suppriment les exceptions dans la théorie de la projectivité, éléments des coniques, etc. et fournissent des résultats concordants avec ceux des imaginaires de la Géométrie analytique

La seule interprétation des imaginaires en Géométrie qui ait réussi est celle de Staudt. Il emploie des involutions sans éléments d'ordre, leur assigne un sens et leur donne le nom de point, droite ou plan imaginaire. C'est proprement une théorie des involutions dans l'espace: chaque théorème peut s'énoncer de telle sorte qu'il ne soit question que d'éléments réels. Staudt a montré que l'introduction de ces imaginaires dans la théorie des coniques et dans les relations projectives ~~lève~~ supprime les exceptions auxquelles donne lieu l'emploi exclusif des éléments réels, et s'accorde avec les résultats de la Géométrie analytique.

La méthode de Staudt conduit, encore dans la théorie des courbes algébriques d'ordre supérieur au second, aux mêmes résultats que l'analyse. M. Stolz (Mathematische Annalen t. IV, p. 416) en effet a démontré que l'on peut représenter les éléments imaginaires introduits par Staudt par des systèmes de nombres complexes, et que les propriétés telles que « un point est situé dans un plan » s'expriment par les relations connues entre les nombres complexes.

Pour prouver la même chose géométriquement, on peut partir de la définition d'une courbe algébrique, donnée par Grassmann (Ausdehnungslehre 1862)

Cf August: Untersuchungen über das Imaginäre in der Geometrie. Programm der Friedrichsrealschule zu Berlin, 1872.

I. L'imaginaire en Géométrie

§1 Le sens d'une figure. Involution

1. Toute figure uniforme (droite, faisceau de rayons ou de plans) ou du second ordre (conique, faisceau de rayons ou de plans du 2e ordre, troupe réglée) ~~sont des~~ est une figure fermée qu'on peut imaginer ~~décrite~~ engendrée par le mouvement d'un de ses éléments. D'où deux sens opposés: ABC et CBA. La figure étant fermée, ABC = BCA = CAB, CBA = BAC = ACB.

2. Dans deux figures en relation projective, ~~il y a deux sens qui~~ les sens se correspondent deux à deux: si A, B, C ont pour homologues $A_1 B_1 C_1$, le sens $A_1B_1C_1$ correspond au sens ABC; les sens inverses se corresp. aussi. Si les deux figures sont l'une dans l'autre, les deux sens correspondants sont ou concordants ou opposés.

3. Dans une involution (relation projective réciproque de deux figures confondues) AA_1, BB_1, CC_1 ..., si le sens ABA_1 est opposé au sens homologue A_1B_1A, les éléments AA_1 ne sont pas séparés par les éléments BB_1. Il y a donc deux éléments d'ordre (doubles) ~~homologues~~ qui sont séparés harmoniqt par ~~tout~~ couple de l'involution. Si au contraire les sens homologues ABA_1 et A_1B_1A concordent, les couples AA_1 et BB_1 sont séparés l'un par l'autre, et il n'y a pas d'éléments doubles (c.à.d. qui soient leurs propres homologues).

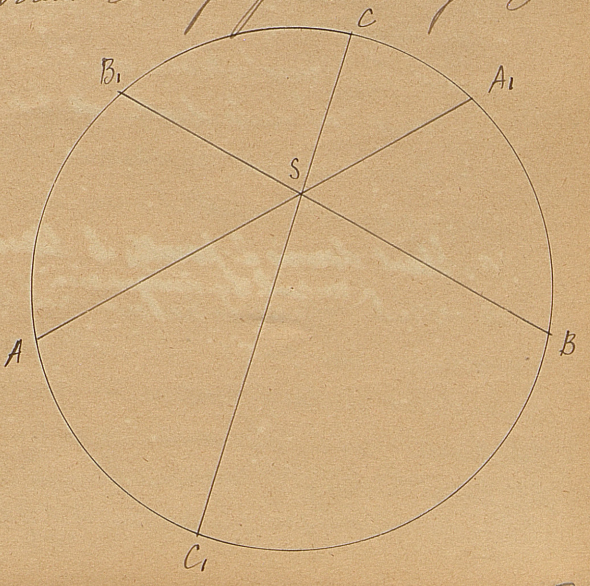
4. Si les points d'une conique [s]ont en involution, il y a un point S [qui] se trouve en ligne droite avec [cha]que couple de points homologues.

[Car]: $CC_1AB \barwedge C_1CAB_1 \barwedge CC_1B_1A$

[donc]: $A(CC_1AB) \barwedge B(CC_1B_1A)$

[Les] 2 faisceaux sont perspectifs [puis]que les rayons homologues AA_1, se coupent encore sur CC_1 (en S.)

~~... de l'involution~~ (v. Beiträge, 74)



§ 2. Les éléments imaginaires de première espèce.

5. Si l'on considère une involution sans éléments doubles comme engendrée par un couple d'éléments homologues mobiles, ils se déplaceront dans le même sens. On peut donc dans ce cas parler du sens dans lequel ~~est~~ on suppose décrite l'involution, ou brièvement du sens de l'involution.

Si l'on attribue à une telle involution un sens déterminé (dans lequel on la suppose décrite) on obtient un élément imaginaire de première espèce. — Une même involution peut donner lieu à deux éléments imaginaires conjugués, suivant le sens qu'on lui attribue.

6. Une involution étant déterminée par 2 couples d'éléments, un élément imaginaire est défini par 2 couples d'éléments réels qui se séparent mutuellement, quand on donne leur sens.
Exemple: étant donnés 2 couples AA_1, BB_1, on obtient les deux éléments imaginaires conjugués ABA_1B_1 et A_1BAB_1.

§ 3. Combinaison des éléments imaginaires.

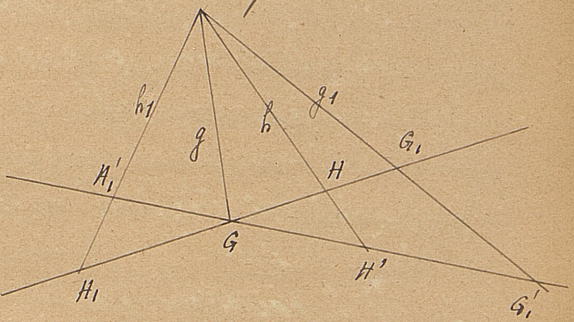
(v. Beiträge, n° 120) 9. Un point imaginaire est situé sur une droite imaginaire de 1re esp. quand les involutions qui les représentent sont en perspective. La droite réelle qui porte le point se trouve alors dans le plan réel qui passe par la droite.

Une droite de 1re espèce est située dans un plan imaginaire quand les involutions qui les représentent sont en perspective. Le point réel de la droite se trouve alors sur l'axe réel du plan.

Si deux éléments imaginaires sont l'un dans l'autre, leurs conjugués sont aussi l'un dans l'autre.

10. Étant donnés 2 points, ils déterminent toujours une droite. Si elle est réelle, (un point, un imaginaire) elle est le porteur réel du point imaginaire. Si elle est imaginaire son point réel est le point donné; son plan réel est déterminé par ce point et par le porteur réel du point imaginaire. Elle est donc représentée par le faisceau de rayons réel qui a pour centre le point réel, et pour section rectiligne l'involution qui représente le point imaginaire (le faisceau et le porteur réel de ce point sont en involution et en perspective).

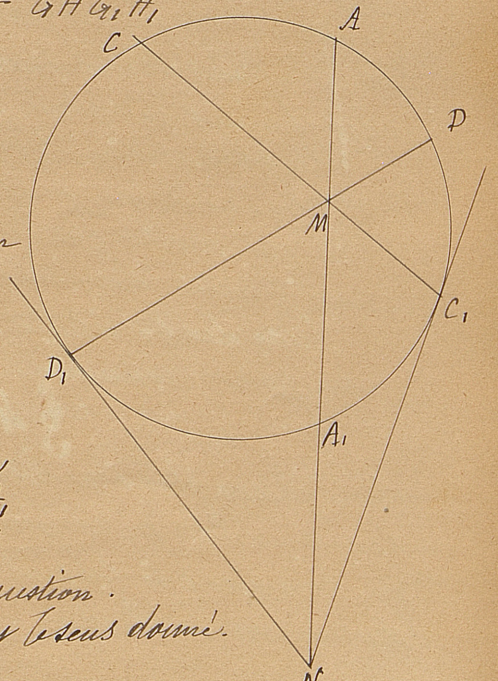
Si deux points imaginaires sont sur la même droite imaginaire (de 1e esp.) le plan réel de cette droite doit contenir les 2 porteurs réels de ces points ; donc ceux-ci doivent se couper. Ces deux droites en involution déterminent un faisceau en involution situé en perspective avec elles. Si GHG_1H_1 est une représentation de l'un des points imaginaires, $GH'G_1'H_1'$ une représentation de l'autre, ghg_1h_1 sera une représentation de la droite imaginaire qui les contient.



11. Étant donné un couple AA_1 d'une involution sans éléments doubles, on peut en trouver un autre BB_1 tel que: $ABA_1B_1 \barwedge GHG_1H_1$ et que le sens ABA_1 soit un sens donné. (Beiträge n° 83)

Il suffit de considérer le cas où l'involution se trouve sur une conique, tous les autres se ramenant par projection à celui-là. Soit M le centre de cette involution ; on détermine sur [AMA_1] la droite] le point N tel que $AMA_1N \barwedge GHG_1H_1$. M est à l'intérieur de la conique, puisque l'involution n'a pas d'éléments doubles ; d'autre part, GG_1 ~~et HH1~~ et HH_1 se séparent mutuellement ; donc aussi AA_1 et MN, de sorte que N est extérieur à la conique. Menons les 2 tangentes NC_1, ND_1. On a (vus de C_1 ou de D_1) :

$AMA_1N \barwedge ACA_1C_1 \barwedge ADA_1D_1$



Puisque AA_1 séparent C_1D_1, CC_1, DD_1, ils séparent aussi CD ; donc les sens ACA_1, ADA_1 sont opposés. L'un des deux jets ACA_1C_1, ADA_1D_1 répond donc à la question. Le couple cherché est CC_1 ou DD_1 suivant le sens donné.

Si GHG_1H_1 est un jet harmonique, CC_1 et DD_1 coïncident, car C_1D_1 passe par M. L'un des deux jets $AG_1A_1D_1$, $AD_1A_1C_1$ répond à la question, c.à.d. possède le sens demandé.

12. En particulier, étant donné un couple AA_1 dans une involution sans éléments d'ordre, on peut trouver un second couple BB_1 ~~tel~~ qui soit harmonique au premier : les deux éléments imaginaires conjugués ont pour représentation harmonique : ABA_1B_1, AB_1A_1B.
Il suffit des trois premiers éléments pour déterminer chacun d'eux (ou même de deux en prenant pour A le point à l'infini)

13. Si 2 points imaginaires sont sur une droite réelle, leurs porteurs réels coïncident avec cette droite.

Deux points situés dans un même plan réel sont toujours sur une droite réelle ou imaginaire de 1re esp.

Deux plans qui passent par le même point réel se coupent suivant une droite réelle ou imaginaire de 1re esp.

Deux droites situées dans un même plan se coupent en un point réel ou imaginaire.

Deux droites qui passent par un même point réel sont contenues dans un plan réel ou imaginaire.

14. Un point et une droite sont situés l'un dans l'autre ou déterminent un plan.

Un plan et une droite sont situés l'un dans l'autre ou déterminent une droite.

Deux droites qui ont un point imaginaire commun sont situées dans un même plan.

Deux droites situées dans un même plan imaginaire ont un point commun.

§ 4. Lemme

15. Deux plans ne déterminent une droite de 1re espèce que si leurs axes réels se coupent. On voudrait pouvoir dire, en général, que deux plans se coupent suivant une droite, et que deux ~~points~~ déterminent une droite.

Étant donnée sur une conique une involution sans éléments d'ordre et de sens déterminé, si en la projetant depuis 2 points M et N de la conique sur une droite p on obtient une même involution (en situation et en sens), p est la polaire du centre d'involution et en projetant l'involution sur p depuis un autre point qcque de la conique on obtient encore la même involution, dans laquelle deux points homologues sont conjugués par rapport à la conique (càd. que chacun d'eux est sur la polaire de l'autre. v. St. 239.)

§ 5. La droite de seconde espèce.

16. Soient donnés deux plans imaginaires A, B dont les axes réels (p, q) ne se coupent pas; on va chercher le système de leurs points communs.

I. Les porteurs réels des points imaginaires situés à la fois dans deux plans imaginaires A, B, forment un système de rayons de 1er ordre et de 1e classe.

II. Les axes réels des plans imaginaires qui passent à la fois par deux points imaginaires A, B, forment un système de rayons de 1er ordre et de 1e classe.

17 (Suite). I. Les rayons de ce système sont les axes des plans imaginaires qui passent par les 2 points A', B' où les droites p et q rencontrent respectivement les plans B et A.

II. Les rayons de ce système sont les porteurs des plans imaginaires qui se trouvent dans les plans B' et A' que déterminent respectivt A et q, B et p.

18. I. Tout plan qui passe par les 2 points A', B' passe par tous les autres points communs aux plans A et B.

II. Tout point ~~situé~~ commun aux 2 plans A', B' est situé dans tous les autres plans qui passent par les points A et B.

I. Tout plan qui passe par 2 points du système (des points communs aux 2 plans A et B) passe par tous les autres.

II. Tout point commun à 2 plans du système (des plans qui passent par les 2 points A et B) est situé dans tous les autres.

En résumé :

Deux points, et deux plans passant les deux points, déterminent un système de rayons de 1er ordre et de 1re classe. Tout rayon du système est le porteur d'une involution et l'axe d'un faisceau involutif de plans (les deux involutions ayant un sens déterminé). Toutes les involutions rectilignes sont en perspective (en situation d'un sens) avec tous les faisceaux de plans ; chaque rayon du système est porteur d'un point imaginaire et axe d'un plan imaginaire. Chacun des points est situé dans chacun des plans.

Cette figure tout entière s'appelle droite de seconde espèce (1)

19. Ainsi une droite de seconde espèce est déterminée, soit par 2 points, soit par 2 plans, soit par une troupe réglée en involution sans éléments d'ordre et ayant un sens déterminé (v. Beiträge 117.)

– Tous les rayons qui coupent une droite n'appartenant pas au système forment une troupe réglée (faisceau de génératrices d'une surface réglée)

20. Si dans les 2 premiers modes de définition on remplace les éléments (points ou plans imaginaires) par leurs conjugués, et que dans le 3e on renverse le sens (de la troupe réglée) on obtient encore une droite de seconde espèce, dite conjuguée de la première.

Si une droite réelle coupe une droite imaginaire de seconde espèce, elle coupe aussi sa conjuguée ; les points et les plans qu'elle détermine avec chacune d'elles sont aussi conjugués.

21. Une droite de seconde espèce a un point (et un seul) commun avec chaque plan réel, et détermine un plan (et un seul) avec chaque point réel.

Trois plans passent par une même droite ou par un même point (B.
Trois points sont sur une même droite ou dans un même plan
Un point et une droite (extérieurs) déterminent un plan.
Un plan et une droite (non contenue...) déterminent un point.

Si deux droites de seconde espèce ont un point commun, elles sont situées dans un même plan ; et réciproquement.

(1) August a défini la droite de seconde espèce comme l'intersection de deux plans imaginaires n'ayant aucun point réel commun.

§ 6. Du sens des éléments d'une droite de seconde espèce.

22. Définition du jet (Wurf) (Beiträge 24.)

La considération de la droite de seconde espèce permet de distinguer diverses espèces de jets, distinction importante pour ~~la projectivité~~ la théorie de des figures imaginaires.

Soient ABΓΔ quatre éléments (points ou plans imaginaires) d'une droite de seconde espèce; p q r s leurs porteurs ou axes réels. Si les 4 droites pqrs appartiennent à une même troupe réglée, on dit que le jet ABΓΔ est neutre, ou que les éléments appartiennent à une chaîne. (Beiträge, 19b et 20b)

Une troupe réglée étant déterminée par 3 droites, une chaîne est déterminée par 3 ~~points~~ éléments d'une droite de seconde espèce.

Jet ordinaire (à éléments réels.) (Beiträge 83.)

Les 4 éléments d'un jet ordinaire ABCD se suivent dans cet ordre; on dira qu'ils forment une suite.

Suivant que pqrs, pqsr ou psqr est un jet ordinaire, le jet ABΓΔ sera un jet neutre de 1e, de 2e ou de 3e espèce (1)

23. Si les 4 droites p q r s n'appartiennent pas à une même troupe réglée, on peut déterminer une troupe réglée à laquelle appartiennent p, q, r. La droite s ne coupe pas cette troupe; elle est donc située d'un côté ou de l'autre de la surface réglée.

Supposons que ABΓΔ soient les points de la droite de seconde esp. D. Soient $a a_1 b b_1$ quatre directrices de la troupe réglée p q r; elles sont en involution; soit $a b a_1$ le sens choisi⊕; le jet $a b a_1 b_1$ est une représentation de la droite D. Le point Δ est dans le plan imaginaire $p(a b a_1 b_1)$ comme tous les autres points de la dr. D; donc la dr. s (qui l'involution porte Δ) est en perspective avec le faisceau de plans en involution $p(a b a_1 b_1)$ et le sens des 2 involutions concorde.

⊕ pour représenter Δ.

(1) Cette distinction est destinée à préciser la définition de la projectivité de Staudt (G. § 9) dont ~~qu~~ Klein a montré l'insuffisance (ap. Math. Annalen, t. VII)

Si d'autre part on coupe la droite s par le faisceau $a(pqr)$ dans ce sens, le sens du point d'intersection sera le même que celui du point de intersection avec le faisceau $p(aba_1b_1)$ ou sera opposé. — Cette distinction est d'ailleurs indépendante du rayon a (1). En gén. deux droites sont situées de différents côtés de la surface réglée pqr, si l'une est parcourue dans le même sens, et l'autre en sens opposés par les 2 faisceaux de plans.

25. En effet, soit s parcourue dans le même sens, t parcourue en sens contraire par les 2 faisceaux de plans $a(pqr)$ et $p(aba_1)$. Soient S et T les points où elles percent le plan ap: ces points doivent se trouver dans des secteurs angulaires différents séparés par les dr. a et p (axes des 2 faisceaux). Ces 2 points sont donc séparés par la surface réglée elle-même (qui contient a et p) et par suite les droites s et t elles-mêmes, qui ne coupent pas la surface réglée, sont situées de côtés différents par rapp. à elle.

26. Définitions. Si $ABΓΔ$ sont 4 points d'une droite de seconde espèce, $p\,q\,r\,s$ leurs porteurs réels, on dira que le point $Δ$ est dans le sens $ABΓ$ ou dans le sens opposé, suivant que les 2 faisceaux de plans $a(pqr)$ et $p(aba_1)$ décrivent la droite s dans le même sens ou ~~dans~~ en sens opposé (le sens aba_1 correspondant à celui qui représente $Δ$.) (cf. Beiträge, 196)

Si $ABΓΔ$ sont 4 plans d'une droite de seconde espèce $p\,q\,r\,s$ leurs axes réels, on dira que le plan $Δ$ est dans le sens $ABΓ$ ou dans le sens opposé, suivant que les deux séries de points $a(pqr)$ et $p(aba_1)$ décrivent le faisceau de plans s dans le même sens ou en sens opposé (le sens aba_1 correspondant à $Δ$.)

Si $Δ$ est dans le sens $ABΓ$, il est aussi dans le sens $BΓA$, $ΓAB$. Sinon, il est dans le sens $ΓBA$, ou dans le sens $BAΓ$, $AΓB$.

Si la série de points s est décrite dans le même sens par les 2 faisceaux de plans $a(pqr)$ et $p(aba_1)$, le faisceau de plans s est décrit en sens opposés par les 2 séries de points $a(pqr)$ et $p(aba_1)$ [Beitr. 6

(1) Beiträge 55. Démontré dans le no 24 du mémoire

318

28. On dit que deux jets $AB\Gamma\Delta$ et $A'B'\Gamma'\Delta'$ sont de même espèce s'ils ont le même sens ou s'ils sont tous deux neutres et de la même espèce. (cf. Beiträge, 197)

Si 4 points d'une droite de seconde espèce sont situés dans 4 plans de la droite conjuguée, le jet des 4 points est de même espèce que le jet des 4 plans

§ 7. Suite

29. Si deux systèmes réels de l'espace sont en relation projective, à chaque élément imaginaire correspond un élément imaginaire, et à chaque jet de 4 éléments d'une droite de seconde espèce, un jet semblable et de même espèce. On dit que les deux figures sont en projectivité réelle. (Beiträge, 149) 198

30. Si l'on projette 4 points réels ou imaginaires ABCD d'une droite réelle depuis deux droites de seconde espèce α, α' (par 4 plans) les deux jets: $\alpha(ABCD)$, $\alpha'(ABCD)$ sont de même espèce.

Si l'on coupe 4 plans réels ou imaginaires ABCD d'une droite réelle par deux droites de seconde espèce α, α', les deux jets de points: $\alpha(ABCD)$, $\alpha'(ABCD)$ sont de même espèce. (1)

31. On peut étendre ces théorèmes à 4 points ou plans d'une droite quelconque, pourvu qu'elle ne rencontre pas les droites α, α'.

§ 8. Du sens des éléments dans les autres figures.

32. Si ABCD sont 4 éléments d'une droite réelle ou imaginaire 1e esp. f, on déterminera l'espèce du jet ABCD en joignant ou coupant ces 4 éléments avec une droite imaginaire de seconde espèce α qui ne rencontre pas la dr. f. L'espèce du jet $\alpha(ABCD)$ est indépendante du choix de la droite α (en vertu de 30, 31) (2)

Si les 4 éléments sont réels, le jet est neutre.

Si les 3 éléments ABC de la droite réelle f sont réels, mais si D est imaginaire et représenté par EFE_1F_1, D est dans le sens ABC ou non suivant que le sens ABC concorde avec le sens EFE_1 ou non

(1) Beiträge, 199.

(2) Beiträge 200.

33. Si 4 points d'une droite sont situés dans 4 plans d'une autre droite, les deux jets sont de même espèce. (Beiträge 201.)

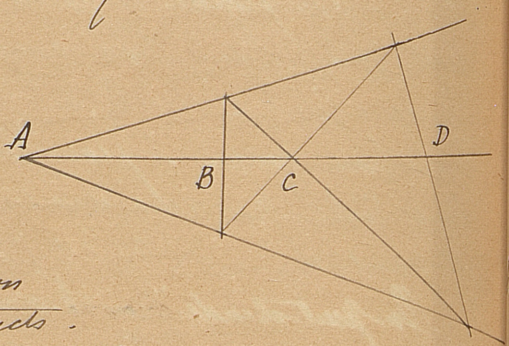
34. Si 4 droites d'esp. $\alpha\beta\gamma\delta$ sont situées dans un même plan K et passent par le même point K', le jet $\alpha\beta\gamma\delta$ sera de même espèce
1° que le jet des 4 plans ABCD qui passent par les 4 droites et se coupent suivant une même droite a ~~contenue ds le plan K~~ passant par le point K'
2° que le jet des 4 points A'B'C'D' où les 4 droites rencontrent une même droite a' située dans le plan K. (Beiträge 202)

35. Des jets en perspective sont de même espèce quant au sens. (B. 203.)

36. Quand dans un jet on permute à la fois deux éléments et les deux autres, on obtient un jet de même espèce que le premier. (B. 205)

§ 9. Éléments harmoniques.

37. Si A, B, C sont 3 points d'une ligne droite, on détermine leur quatrième harmonique D en construisant un quadrilatère complet quelconque. Si les 3 points donnés sont réels, toute la construction est réelle, et les 4 points sont distincts.



On le prouve même quand les points sont tous imaginaires. — On dit dans tous les cas que le point D est séparé harmoniquement de B par les points A et C (1)

38) La projection d'un jet harmonique est un jet harmonique

(Deux éléments imaginaires conjugués sont séparés harmoniquement par chaque couple de l'involution qui les représente (B. 145)

39. Il existe un couple de points, et un seul, qui soit à la fois séparé harmoniquement par deux couples réels donnés.

40. Un jet harmonique est toujours neutre; autrement dit quatre éléments harmoniques forment une chaîne. (B. 143)

(1) Geom. d. Lage, 93. Beiträge, 142

12. Si dans une figure qcque, ni les chaînes MAB et MA_1B_1, ni les chaînes MAB_1 et MA_1B n'ont un second élément commun, il y a toujours un élément N qui est séparé harmoniquement de M par AA_1 et par BB_1, et réciproquement. (B. 211.)

§ 10. Relation projective.

43. Définition de la projectivité de deux figures uniformes réelles ou imaginaires. (B. 215.) Remarquer que l'expression « jets de même espèce » a maintenant un sens plus restreint (dans le cas où les jets sont neutres.) V. n° 22 de ce mémoire.

44. A chaque jet harmonique correspond un jet harmonique (B. 214.)

45. Si deux droites réelles sont projectives, de telle sorte qu'à 3 points réels ABC de l'une correspondent 3 points réels $A'B'C'$ de l'autre, elles sont en projectivité réelle (29) (B. 216.)

46. Si deux figures uniformes projectives et situées l'une dans l'autre ont 3 éléments correspondants communs, elles ont tous leurs éléments correspondants communs. (B. 217.)

Si $ABCD \barwedge ADCB$, les couples AC et BD sont harmoniques.

[4]3. Deux figures en perspective (telles que chaque élément de l'une soit situé dans ~~chaque~~ l'élément correspondant de l'autre) sont par suite projectives (35.)

Comme par deux projections successives on peut transformer un jet en un autre où les éléments soient intervertis deux par deux, deux tels jets sont projectifs. (36)

~~Deux figures réelles en projectivité réelle sont entièrement projectives~~

[4]6. Deux figures projectives, ou bien sont en perspective, ou bien peuvent être considérées comme la première et la dernière d'une suite de figures dont chacune est en perspective avec la suivante (cf. G. 112)

[4]7. Pour que cette propriété soit vraie en général, il est indispensable de tenir compte du sens : ainsi, si dans une figure on fait correspondre à chaque élément son conjugué (ch. élém. réel à lui-même) on n'obtient pas une figure projective (c. à d. issue de la 1re par une suite de perspectives) à latc [cf. B. 226.] (v. nos 43 et 22, 38)

§ 11. Éléments imaginaires d'une conique réelle

48. Conique = lieu des points d'intersection des rayons homologues de deux faisceaux réels projectifs situés dans un même plan. Le point d'intersection de 2 rayons imaginaires homologues est un point imaginaire de la conique.

Chacun des 2 rayons imaginaires est représenté par une involution dans le faisceau correspondant, et les 2 involutions sont en perspective avec une même involution de points sur la conique : le centre de cette involution représente le point imaginaire, si l'on y ajoute le sens de l'involution.

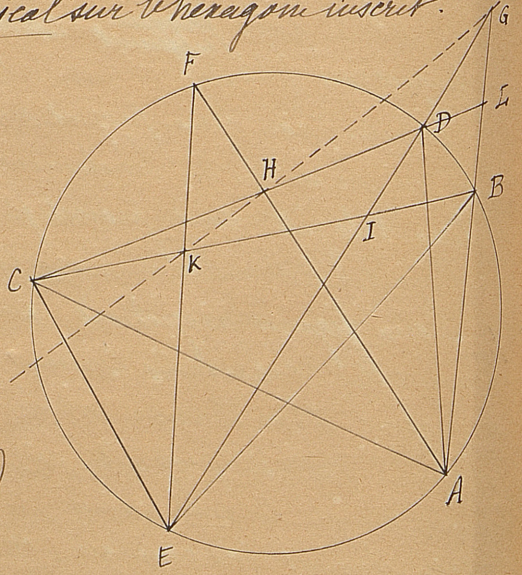
Toute droite réelle, située dans le plan d'une conique et n'ayant avec elle aucun point réel commun, la coupe en 2 points imaginaires conjugués. — Son pôle est le centre de l'involution qui représente à la fois ces deux points (suivant le sens qu'on lui attribue).

50. Une droite imaginaire, située dans le plan d'une conique réelle, la coupe en un ou deux points.

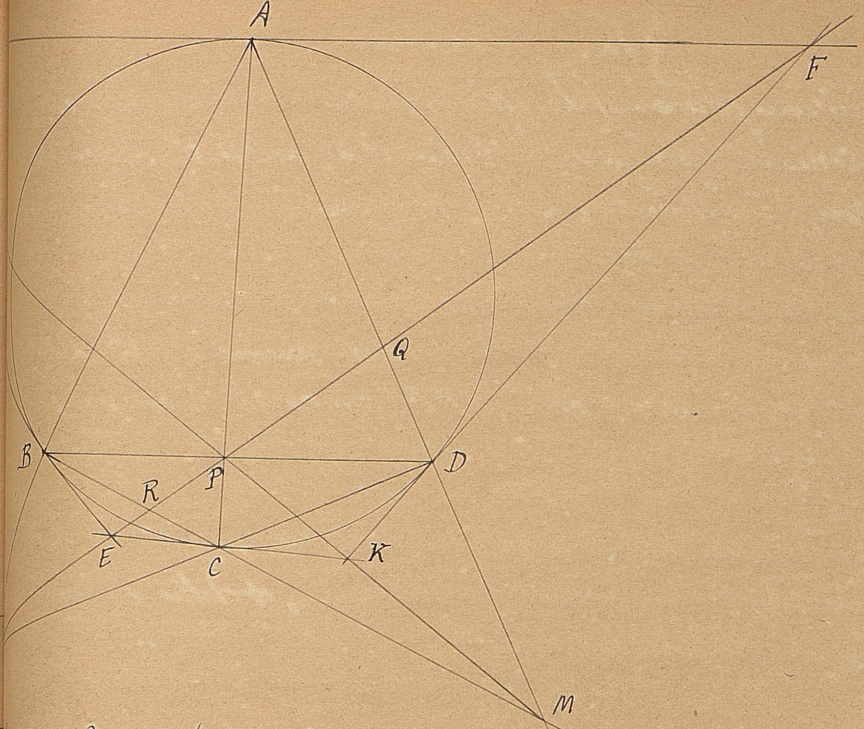
51. Deux faisceaux de rayons, qui projettent une conique depuis deux quelconques de ses points, sont projectifs. Les tangentes en ces points correspondent à la ligne qui joint leurs centres.

Corollaire : Théorème de Pascal sur l'hexagone inscrit.

Soit ABCDEF l'hexagone inscrit. Les faisceaux A(BCDF), E(BCDF) sont projectifs ; les séries de points CHDL, CKIB (suivant lesquelles ils coupent resp. les dr CD, CB) sont projectives, donc en perspective (le p. C commun). Le centre de projection est le p. G, intersection de AB et ED (1) ; donc les 3 points GHK sont en ligne droite (en perspective).



(1) c à d. de BL et de ID.



ECDA) $\barwedge$ C(BEDA) $\barwedge$ C(EBAD) (en vertu du n° précédent.)
Le 1er et le dernier de ces faisceaux sont perspectifs (rayon BC commun)
donc deux rayons homologues se coupent sur une même droite : E
est sur NP. De même F est sur NP, H et K sont sur MP.
Quand, BCD restant fixe, A change, P se déplace sur BP ; les
rayons correspondants EP, KP (E et K fixes) décrivent des séries
de points projectives sur les 2 tangentes fixes KD, EB. Donc :
Deux tangentes à une conique sont coupées par toutes les
autres en deux séries de points projectives.
Par chaque point réel ou imaginaire passent deux tangentes
à la conique, ou une seule. Dans le dernier cas, le point appartient à la courbe
En effet (du n° 50 par dualité on déduit que) si par un point ne
passe qu'une tangente, c'est que l'involution qui représente ce point
se compose de couples de points conjugués ; donc le point se trouve
sur la conique

§ 12. Involution

53. Définition générale (B. 70.) On étend aux points imaginaires d'une conique en involution les th. du no. 2 (propriété du centre d'involution). — Par le centre d'involution (qui ne peut être sur la courbe) passent 2 tangentes à la courbe (réelles ou imaginaires). Il y a donc dans l'involution deux éléments de ordre (réels ou imaginaires) qui se correspondent à eux-mêmes. (B. 220)

Soient M, N les éléments de ordre, AA_1 un couple d'éléments : on a : $MNAA_1 \wedge MNA_1A$, donc AA_1 sont séparés harmoniqt. par MN.

54. Si sur une même droite on a deux séries projectives de points qui ont un seul point correspondant commun C, et telles qu'aux p. AB_1 de l'une correspondent les p. BA_1 de l'autre, on a une involution : $CC.AA_1.BB_1$. (B. 221.)

Réciproquement, si $CC.AA_1.BB_1$ est une involution, les deux séries de points projectives : CAB_1 et CBA_1 n'ont que le p. C correspondant commun.

Si les deux séries projectives CAB et CA_1B_1 n'ont que l'élément C commun, et de même les séries projectives CAB et CA_2B_2 : alors les séries CA_1B_1 et CA_2B_2 n'ont que l'élément C commun, à moins qu'elles ne soient identiques (B. 223.)

55. Deux séries projectives de points sur une même droite ne peuvent avoir plus de 2 points correspondants communs sans être identiques ; mais elles ont toujours au moins un point correspondant commun (projectives)

En général, deux figures élémentaires situées l'une dans l'autre ont toujours un ou deux éléments communs (B. 222.)

Dans le second cas, elles sont en involution. — Si les deux figures sont en projectivité réelle, elles ont en commun soit un élément réel, soit deux éléments réels ou imaginaires conjugués.

Projectivité cyclique ($AA_1A_2 \wedge A_1A_2A$) [V. Clebsch, ap. Crelle, t. 68.]

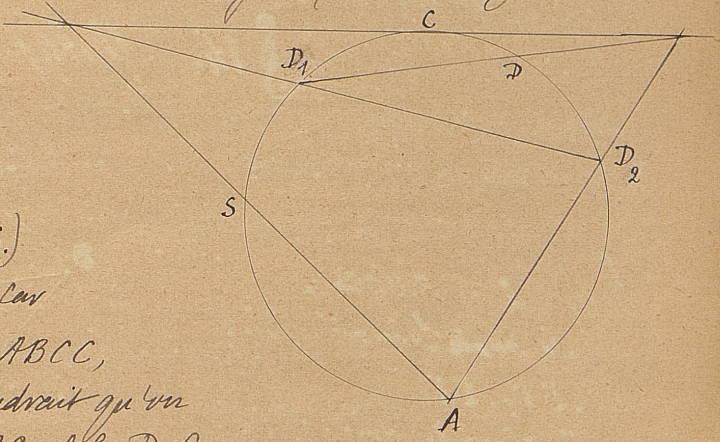
(Klein, Interprétation des Imaginaires en Géométrie, Göttinger Nachrichten, 1

II. Le calcul des jets.

§ 13. Egalité et Addition.

56. Définition de l'égalité des jets (B. 256)

57. Définition de la somme de deux jets (B. 258)



$u_1 = ABCD,$

$u_2 = ABCD_2$

$u_1 + u_2 = ABCS$

58. Jets impropres:

$0, 1, \infty$ (B. 256.)

Le jet ∞ sera exclu; car

si: $u_2 = \infty$, c à d: $u_2 = ABCC$,

~~$ABCD_1 + ABCC$~~ il faudrait qu'on eût l'involution: $CC.AS.D_1C$

ce qui est impossible.

Si: $u_1 = 0$, c à d: $u_1 = ABCA$, il faut qu'on ait l'involution: $CC.AS.AD_2$ donc S est identique à D_2, et on a

$$0 + u_2 = u_2 = ABCD_2.$$

59. Loi associative: $(u_1+u_2)+u_3 = (u_1+u_3)+u_2$ (B. 259)

$u_1 = ABCD, \quad u_2 = ABCD_2 \quad u_3 = ABCD_3$

$u_1 + u_3 = ABCS_2 \qquad u_1 + u_2 = ABCS_3$

$CC.D_1D_2.AS_3$ est une involution; donc les 2 séries projectives CAD_1 et CD_2S_3 n'ont que C de commun (54). De même $CC.AS_2.D_1D_3$ est une involution; donc les 2 séries projectives CAD_1 et CD_3S_2 n'ont que C de commun. Or, les 2 séries CD_2S_3 et CD_3S_2 ayant le p. C commun, on a l'involution: $CC.D_2S_2.D_3S_3$. Soit S l'homologue de A dans cette involution.

$ABCD_2 + ABCS_2 = ABCS$

$ABCD_3 + ABCS_3 = ABCS$ c. q. f. d.

60. Définition de la différence de deux jets $(u_2 - u_1)$

Si $u_1 = ABCD_1$, $u_2 = ABCD_2$, $u_2 - u_1 = ABCD$

le point D étant construit comme il est indiqué ds la fig.

(Involution: $CC . AD_2 . D_1D$.) d'où: $ABCD + ABCD_1 = ABCD_2$ — $(0-u)$ s'écrit: $-u$

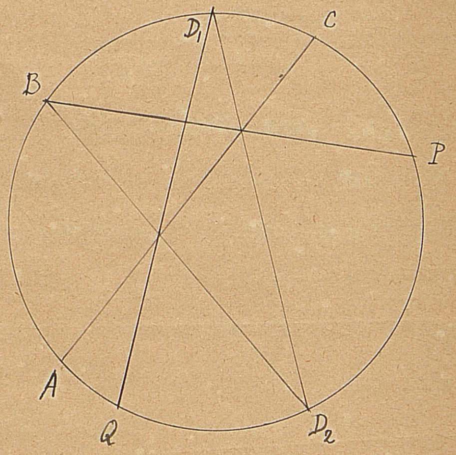
(V. Hankel, Vorl. ü. d. complexen Zahlen; Schröder, Lehrb. d. A. u. A.)

§ 14. Multiplication

61. Définition du produit de deux jets. $u_1 = ABCD_1$, $u_2 = ABCD_2$

On forme l'involution: $AC . D_1D_2 . BP$

(B. 268.) $u_1u_2 = ABCP$.



Si $u_1 = 1 = ABCB$,
on doit avoir l'involution:
$AC . BD_2 . BP$
donc P coïncide avec D_2:
$1 . u_2 = u_2$

Pour que $u_1u_2 = 0$, il faut que P coïncide avec A; alors un des points D_1, D_2 coïncidera avec A, et l'un des facteurs sera $ABCA = 0$.

Inversement, on dit qu'un produit dont un facteur est nul doit être nul, bien que l'involution: $AC . AD_2 . BP$ soit impossible(1). Donc: Pour qu'un produit soit égal à zéro il faut et il suffit que l'un de ses facteurs soit 0. (B. 269.)

62. Si: $ABCE \times ABCF = ABCG$, on a l'involution:
$AC . BG . EF$; d'où: $ABCF = CGAE = AECG$;
donc $ABCE \times AECG = ABCG$ (autre définition)

Loi associative: $u_1 = ABCD_1$, $u_2 = ABCD_2$, $u_3 = ABCD_3$
posons: $u_2 = AD_1CP_3$ $u_3 = AP_3CP$

$u_1u_2 = ABCD_1 \times AD_1CP_3 = ABCP_3$ $(u_1u_2)u_3 = ABCP$

$u_2u_3 = AD_1CP_3 \times AP_3CP = AD_1CP$ $(u_2u_3)u_1 = ABCP$

Donc: $(u_1u_2)u_3 = (u_2u_3)u_1$ (B. 269.)

(1) parce que la construction est encore applicable à ce cas, et donne P i

63. Loi distributive: $u_1 = ABCD_1$, $u_2 = AD_1CD_2$, $u_3 = AD_1CD_3$;
$u_2 + u_3 = AD_1CS$: $CC_1D_2D_3.AS$ est une involution

$$u_1(u_2+u_3) = ABCD_1 \times AD_1CS = ABCS$$

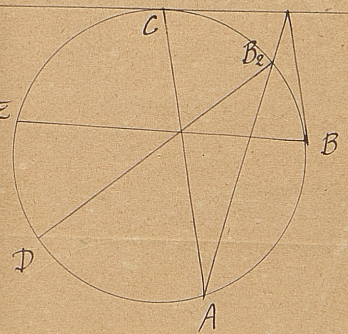
$u_1u_2 = ABCD_2$, $u_1u_3 = ABCD_3$, $u_1u_2 + u_1u_3 = ABCS$.

Donc: $u_1(u_2+u_3) = u_1u_2 + u_1u_3$

Définition du quotient $\frac{u_2}{u_1}$; démonstration de son existence

Si $u_1 = ABCD_1$, $u_2 = ABCD_2$, $\frac{u_2}{u_1} = ABCQ$ (v. la fig. préc.)
car, par construction: $ABCD_1 \times ABCQ = ABCD_2$.
Cette construction est impossible pour $u_1 = 0$.
[Elle est fort possible, au contraire, et donne pour Q le p. C, d'où: $ABCQ = ABCC = \infty$.]
On exclut donc 0 comme diviseur (dénominateur)

64. $u = ABCB.u$; donc: $n.u = nABCB \times u$
On construit: $2ABCB = ABCB_2$, ... $nABCB = ABCB_n$.



Inversement pour diviser un jet v par $\underline{n}$, c.à.d. trouver $\underline{u}$ tel que $nu = v$, il suffit de diviser le jet $\underline{u}$ par $ABCB_n$. — Par exemple on peut construire $ABCE = 2.ABCD$, ou $ABCD = \frac{1}{2} ABCE$ au moyen du jet $ABCB_2 = 2.ABCB$.

§ 15. Comparaison des jets neutres.

65. Un jet neutre est dit négatif s'il est de la première espèce; positif s'il est de la deuxième ou de la troisième (v. n° 22)
Ainsi un jet (ABCD) est négatif, quand AC sont séparés par BD.
66. Le produit de deux jets positifs ou de deux jets négatifs est positif. (Cela se voit sur la figure de multiplication)

l'involution: $AC.AQ.BD_2$ existe aussi bien que l'involution: $AC.BD_2.BP$

Elle est tout à fait semblable ~~que~~ à celle ~~du cas~~ où $u_1 = 1$; et a la même valeur le facteur

Le produit d'un jet positif et d'un jet négatif est négatif.

67. La somme de deux jets positifs est positive; de deux jets négatifs, négative. Elle n'est jamais nulle.

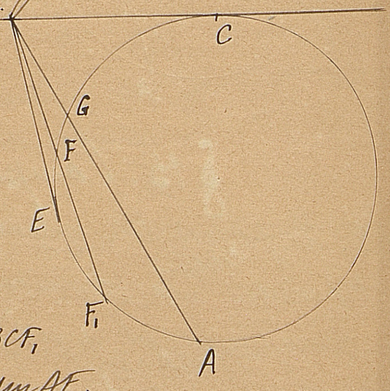
68. Un jet u_1 est dit plus grand qu'un jet u_2 si la différence $u_1 - u_2$ est positive: on écrit: $u_1 > u_2$

Un jet positif est plus grand que 0; négatif, plus petit que 0.

69. Le produit de 2 jets positifs plus petits que 1 est plus petit que 1; plus grands que 1 est plus grand que 1

70. Étant donné un jet positif u, peut-on, en le divisant par 2 un assez grand nombre de fois (n), obtenir un jet u_n plus petit qu'un jet donné $\varepsilon < u$? — Soit $u = ABCD, \dots u_n = ABCD_n$. $\varepsilon = ABCP$ qcque. Les points D et P sont sur le segment (rectiligne) ABC; les points $D_1 D_2 \dots D_n$ s'approchent sans cesse de A. Si dans tout segment AP (non nul) il n'y a pas des points D_n, il existe (en vertu de la continuité de la droite(1)) un point E, qui sépare la partie de ABC où il n'y a aucun point D_n de celle où ils sont tous: de sorte que dans tout segment AE' contenant E, il y a des points D_n.

71. Tout jet $u_n > ABCE$, mais tout jet $ABCF > ABCE$ est plus grand que certains jets u_n.



On peut trouver un jet $ABCF > ABCE$ tel que sa moitié $ABCF_1 < ABCE$. En effet, il suffit de prendre F entre E et G ($ABCG = 2 . ABCE$) F_1 sera entre E et A. Or si $u_n < ABCF$ (ce qui a lieu par hypothèse) $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} < ABCF_1$ il y aura donc des points D_n sur AF_1, càd sur AE. A moins que E ne coïncide avec G, auquel cas ($2ABCE = ABCE$) E coïncidera aussi avec A ($ABCE = 0$.)

Conclusion: Par la dichotomie répétée d'un jet (positif) on peut obtenir un jet plus petit qu'un jet donné quelconque (positif)

(1) Dedekind, Stetigkeit, p. 18.

§ 16. Jets non neutres.

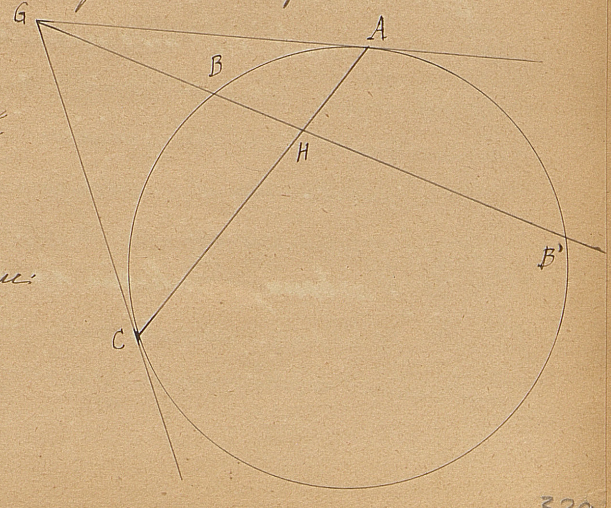
72. La somme et le produit de deux jets conjugués sont neutres. Il existe toujours un jet neutre dont le carré est égal au produit de deux jets conjugués, et qu'on nomme leur module.

73. Si l'on exécute sur un certain nombre de jets et sur leurs conjugués la même suite d'additions et de multiplications on obtient des résultats conjugués.

74. Soit $\underline{i}$ un jet non neutre, i' son conjugué: $i - i' \gtrless 0$.
Soit W un autre jet non neutre, W' son conjugué; on peut trouver v tel que: $W - W' = (i - i')\,v$.
~~De autre part~~ même: $W' - W = (i' - i)\,v'$.
Donc: $v = v'$ $\quad v$ est un jet neutre.
D'autre part: $W + W' = 2u_1$ jet neutre
d'où: $W = u_1 + \frac{i - i'}{2}\,v$
Posons: $u_1 - \frac{i + i'}{2}\,v = u$ jet neutre
il vient: $W = u + iv$ (B. 278)

75. Prenons pour $\underline{i}$ un jet spécial qu'on va définir.
Si: $ABCB + ABCB' = 0$ on a l'involution:
CC. BB'. AA, donc AC est séparé harmoniq^t par BB'.
$ABCB'$ représente un point imaginaire A; posons:

$ABCA = i$.



BB' passe par le pôle G de AC donc le point A peut être représenté par l'intersection de BG et AC. Le porteur réel de A et de A' son conjugué passe par G. Donc $i + i' = 0$

On en tire: $i^2 + ii' = 0$

Or ii' est le carré du module de i, donc 1 (parce que le point H qui représente A est sur GB); par suite:

$$i^2 + 1 = 0 \qquad i^2 = -1$$

76. Si $W = u + iv$, $\quad W' = u + i'v = u - iv \quad (ii' = 1)$

Carré du module $m^2 = WW' = (u+iv)(u-iv) = u^2 + v^2$

$W + W' = 2u \qquad$ Donc $\qquad 2m \geqslant \left[\frac{W+W'}{2}\right]$

Le module d'un produit est égal au produit des modules.

$p^2 = (W_1 W_2)(W_1' W_2') = (W_1 W_1')(W_2 W_2') = m_1^2 m_2^2$

Module d'une somme $\quad s^2 = (W_1 + W_2)(W_1' + W_2')$

$$= m_1^2 + m_2^2 + W_1 W_2' + W_2 W_1'$$

Or: $\qquad 2 m_1 m_2 \geqslant [W_1 W_2' + W_1' W_2] \qquad$ Donc

$s^2 \qquad (m_1 - m_2)^2 \leqslant s^2 \leqslant (m_1 + m_2)^2$

§ 17. Fonctions entières.

77. $W_0 x^n + W_1 x^{n-1} + W_2 x^{n-2} + \dots + W_{n-1} x + W_n = f(x)$

x étant un jet indéterminé (variable), $W_0\, W_1 \dots W_n$ des jets donnés.

On peut assigner au module du jet variable une limite au dessus de laquelle le module de la fonction dépasse un jet donné.

78. Pour h suffisamment petit, le module de $f(x_0 + h)$ diffère de celui de $f(x_0)$ de moins de ε.

79. L'ensemble des modules des valeurs que prend la fonction quand le jet variable prend toutes les valeurs neutres et non neutres a nécessairement une limite inférieure: $ABCD = k$.

On démontre qu'il y a toujours au moins un jet qui, substitué à x, rend le module de la fonction égal à la limite infér. k.

[Cf. Darboux, Bulletin des Sciences mathématiques 1872, p. 307]

80. On démontre ensuite que la limite inférieure du module de la fonction ~~est~~ ne peut être qu'un jet nul, c. à d. $k = 0$ (Argand)

On en conclut qu'il y a toujours un jet qui substitué à x rend la fonction égale à zéro.

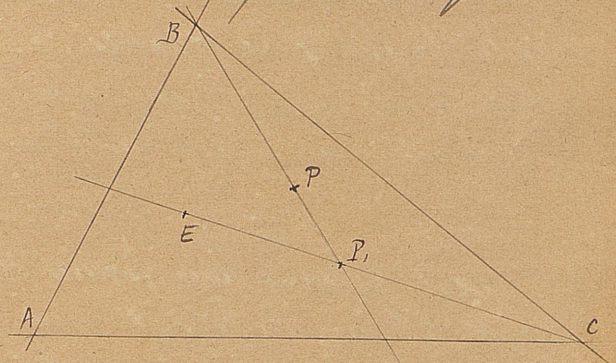
Il s'en suit, d'une manière formelle, qu'il y a n jets, et n seulement, qui annulent ~~la~~ une fonction entière de degré n

§ 18. Coordonnées.

81. Étant donnés 4 points fixes $ABCE$ dans un plan (réel ou imagin.) un point qcq. P de ce plan détermine les 3 jets :

$$A(BECP) \qquad B(CEAP) \qquad C(AEBP)$$

Réciproq.t, deux de ces jets déterminent le point P. Il y a donc une relation entre ces 3 jets.



$B(CEAP) = A(CEBP_1)$

$C(AEBP) = A(CP_1 BP)$

$B(CEAP) \times C(AEBP)$

$= A(CEBP_1) \times A(CP_1 BP)$

$= A(CEBP) = A(BPCE)$

$A(BECP) \times A(BPCE) = 1$

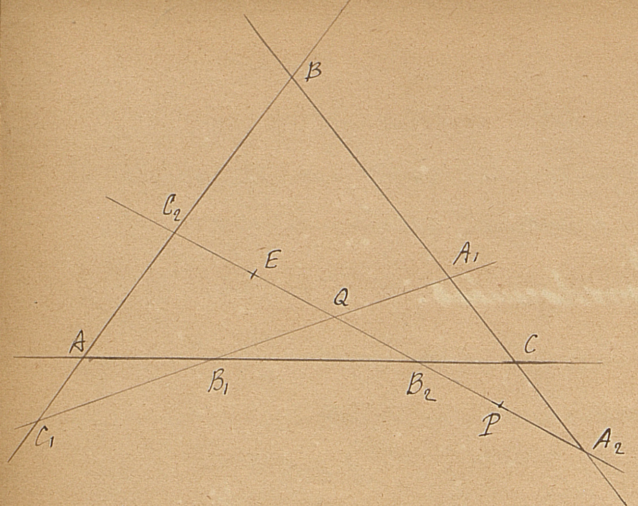
Donc $A(BECP) \times B(CEAP) \times C(AEBP) = 1$. Posons :

$$A(BECP) = \frac{x_3}{x_2} \qquad B(CEAP) = \frac{x_1}{x_3} \qquad C(AEBP) = \frac{x_2}{x_1}$$

Un des 3 jets $x_1\, x_2\, x_3$ est indéterminé. Ces jets s'appellent les coordonnées triangulaires projectives du point P. — Le calcul précédent ne vaut plus si l'une des 3 ~~coordonnées~~ jets devient ∞, ce qui a lieu quand P est sur un des 3 côtés du tr. ABC : ~~Dans ce cas, une des autres est nulle~~ Si P est sur BC, on a : $x_1 = 0$; sur CA : $x_2 = 0$; sur AB : $x_3 = 0$.

Ainsi l'on peut représenter tous les points du plan sans faire aucune des 3 coordonnées $(x_1\, x_2\, x_3)$ infinie.

Interprétation géométrique des coordonnées. On mène dans le plan ABC une ligne qcq. qui coupe EP en Q, BC, CA, AB en $A_1\, B_1\, C_1$ tandis que EP coupe les mêmes côtés du triangle ABC en $A_2\, B_2\, C_2$.



Posons : $x_3 = \underline{C_2EQP}$
$= EC_2PQ.$

$\frac{x_1}{x_3} = B(CEAP) = A_2EC_2P = EA_2PC_2$

donc : $x_1 = EC_2PQ \times EA_2PC_2$
$= EA_2PQ = \underline{A_2EQP}$

$\frac{x_3}{x_2} = A(BECP) = C_2EB_2P = EC_2PB_2$

d'où : $\frac{x_2}{x_3} = EB_2PC_2$

donc : $x_2 = EB_2PC_2 \times EC_2PQ = EB_2PQ = \underline{B_2EQP}$

En vertu du principe de dualité, on détermine les coordonnées projectives $(\xi_1 \xi_2 \xi_3)$ d'une droite p, au moyen d'un trilatère $\underline{abc}$ et d'une droite $\underline{e}$ de son plan ; par les formules :

$$a(becp) = \frac{\xi_3}{\xi_2}, \quad b(ceap) = \frac{\xi_1}{\xi_3}, \quad c(aebp) = \frac{\xi_2}{\xi_1}$$

82. Étant données deux figures élémentaires, par ex. 2 séries de points $ABC\ldots$ $A_1B_1C_1$ sur une conique, si l'on fait correspondre les deux points mobiles P, P_1 qui vérifient l'équation :

$$ABCP = A_1B_1C_1P_1 + u \qquad (\underline{u} \text{ est donné})$$

les deux séries de points sont en relation projective, et les points C et C_1 se correspondent. — De même, l'équation :

$$A_1B_1C_1P_1 = ABCP \times u$$

établit une relation projective où les points A et A_1, C et C_1 se correspondent.

Inversement, si les deux séries de points sont en relation projective de telle sorte que les éléments C et C_1 se correspondent, elles vérifient l'équation : $A_1B_1C_1P_1 = u + v(ABCP)$

Si au contraire les éléments A et C_1 se correspondent, on a l'équation : $A_1B_1C_1P_1 = u + \frac{v}{ABCP}$ $\left(= u + v(CBAP) \right)$

Enfin si C_1 ne correspond ni à A ni à C mais à D, on a l'équation :

$$A_1B_1C_1D_1 = u + \frac{v}{ABCP - ABCD}$$

En résumé, on a l'équation générale:

$$t(ABCP)(A_1B_1C_1P_1) + u(ABCP) + v(A_1B_1C_1P_1) + w = 0$$

83. <u>Équation d'une ligne droite.</u> Les 2 faisceaux issus de A et B doivent être projectifs et avoir le rayon AB commun. Soit P un point mobile de la droite; on doit avoir une équation de la forme:

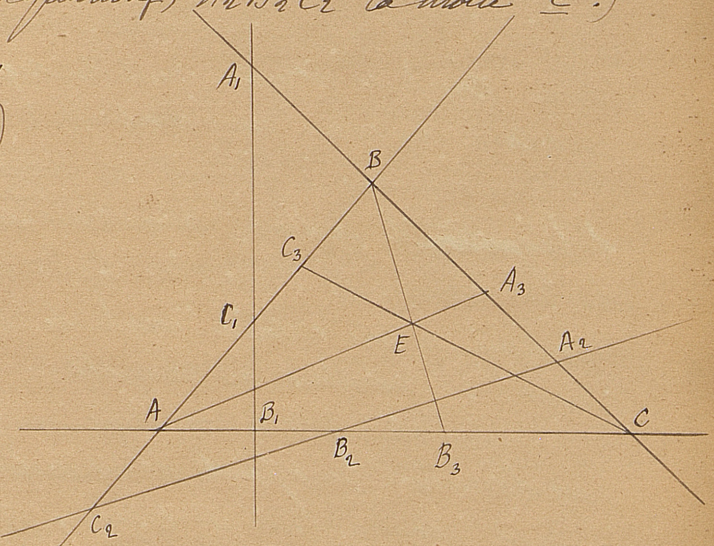
$$B(CEAP) = u + \frac{v}{A(BECP)}$$

c.à.d: $\frac{x_1}{x_3} = u + v\frac{x_2}{x_3}$ ou: $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0$.

Relation entre les coefficients $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$ et les coordonnées $\xi_1\ \xi_2\ \xi_3$ de la droite, quand le triangle coïncide avec le trilatère.

Pour C_1, $x_3 = 0$, donc: $C(AEBC_1) = \frac{x_2}{x_1} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$.

($A_1B_1C_1$ est la droite en question; $A_2B_2C_2$ la droite $\underline{e}$.)



c.à.d. $-\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = AC_3BC_1$

Donc: $-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}(AC_2BC_3)$

$= AC_2BC_3 \times AC_3BC_1$

$= AC_2BC_1$

Or: $\frac{\xi_2}{\xi_1} = c(aebp)$

$= BC_2AC_1 = AC_1BC_2$

Donc ($AC_1BC_2 \times AC_2BC_1 = 1$):

$$\frac{\xi_1}{\xi_2} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2}(AC_2BC_3)$$

$$\frac{\xi_2}{\xi_3} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_3}(BA_2CA_3)$$

$$\frac{\xi_3}{\xi_1} = -\frac{\alpha_3}{\alpha_1}(CB_2AB_3)$$

$$(AC_2BC_3)(BA_2CA_3)(CB_2AB_3) = -1$$

On peut donc poser:

$$AC_2BC_3 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1},\quad BA_2CA_3 = -\frac{\lambda_3}{\lambda_2},\quad CB_2AB_3 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_3}$$

D'où les équations $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\lambda_1\xi_1}{\lambda_2\xi_2}$, $\frac{\alpha_2}{\alpha_3} = \frac{\lambda_2\xi_2}{\lambda_3\xi_3}$, $\frac{\alpha_3}{\alpha_1} = \frac{\lambda_3\xi_3}{\lambda_1\xi_1}$

ou simplement: $\alpha_1 = \lambda_1\xi_1 \quad \alpha_2 = \lambda_2\xi_2 \quad \alpha_3 = \lambda_3\xi_3$

à cause de l'indétermination des jets $\xi_1\ \xi_2\ \xi_3$.

L'équation de la droite devient alors :

$$\lambda_1 \xi_1 x_1 + \lambda_2 \xi_2 x_2 + \lambda_3 \xi_3 x_3 = 0$$

ou simplement : $\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$

si l'on pose $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$,

c. à d. si les 3 jets : AC_2BC_3, BA_2CA_3, CB_2AB_3 sont harmoniques (la dr. e est l'harmonique du point E)

§ 19. Courbes algébriques.

Si la position d'un point mobile P dans un plan est déterminée par cette condition, qu'un point et une droite doivent être situés l'un dans l'autre, point et droite qui résultent de P par une construction de lignes droites, le point P décrit une courbe de n^e ordre s'il est n fois employé dans cette construction. Réciproquement toute courbe de n^e ordre peut être engendrée de cette manière, en ajoutant au besoin une droite (1).

Une conséquence formelle de cette définition, et de la forme de l'équation de la droite, est qu'une certaine fonction entière de degré n des coordonnées de P doit être égale à 0, quand le point P appartient à une certaine courbe de n^e ordre, que les coordonnées soient des nombres ou des jets.

En combinant cette équation avec celle de la droite, on obtient, pour déterminer leurs points d'intersection, une équation de degré n à un jet inconnu, qui est toujours vérifiée par n jets (80). Donc

Une courbe de n^e ordre est coupée par toute droite en n points.

De même, pour trouver les points communs à 2 courbes d'ordre m et n, on combinera leurs équations. Or on sait que deux équations de degré m et n donnent, par l'élimination d'une inconnue, une équation à une inconnue de degré $m \times n$. Donc

Deux courbes d'ordre m et n se coupent en mn points.

(Carlsruhe Juillet 1874.)

(1) Grassmann Ausdehnungslehre p. 189 ; Crelle t. 31, 36, 42, 44, 49.

Second mémoire (même titre) ap. Mathematische Annalen t. XI. (1877)

C'est l'exposition, d'une manière purement géométrique, de la représentation des imaginaires proposée par M. Klein (Göttinger Nachrichten, 1872, p. 373). Elle repose sur une généralisation de l'involution (cf. Jonquières, Annali di Matematica, t. II, 1859) appelée involution cyclique par Clebsch (Journal de Borchardt, t. 68, p. 167).

§ I. Involutions cycliques.

1. Les points $a_1 a_2 \ldots a_n$ d'une droite forment un groupe cyclo-projectif, quand deux séries de points se trouvant sur cette droite en relation projective de telle sorte qu'au point a_1 de la première correspond le point a_2 de la seconde, au point a_2 de la première le point a_3 de la seconde, ... et au point a_n de la prem. le point a_1 de la seconde; c.à.d. si l'on a:

$$a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \barwedge a_2 a_3 a_4 \ldots a_1$$

2. Trois points forment toujours un groupe cyclo-projectif. Pour que quatre points forment un groupe cyclo-projectif, on doit avoir: $a_1 a_2 a_3 a_4 \barwedge a_2 a_3 a_4 a_1 \barwedge a_1 a_4 a_3 a_2$

c.à.d. que $a_1 a_3$ sont séparés harmoniquement par $a_2 a_4$: le jet $a_1 a_2 a_3 a_4$ est harmonique (et les points rangés dans cet ordre)

3. Un groupe cyclo projectif de n points: $a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$ est déterminé d'une manière complète et uniforme par trois points donnés $a_1 a_2 a_3$, aux conditions suivantes: 1° qu'on ait:

$$a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \barwedge a_2 a_3 a_4 \ldots a_1$$

2° que les points suivants: $a_4 a_5 \ldots a_n$ soient situés sur le segment $a_3 a_1$ de la droite (c.à.d. celui qui ne contient pas a_2.)

4. On appelle groupe ordinaire un groupe dont les points se suivent sur la droite dans le même ordre que dans la désignation du groupe (dans l'ordre de leurs indices)

Théorème: Si trois points consécutifs d'un groupe cyclo-projectif ordinaire sont donnés, le groupe est complètement déterminé.

Corollaire: Si deux groupes ordinaires de n points ont trois points consécutifs communs, ils coïncident entièrement.

Ces propositions s'étendent aux faisceaux de plans et de rayons, et aux groupes cyclo-projectifs sur une conique; en particulier aux faisceaux situés en perspective avec ~~une série~~ un groupe de points cyclo-projec[tifs]

11. Dans un groupe cyclo-projectif situé sur une conique, toutes les cordes qui joignent les couples de points ayant la même somme d'indices passent par un même point (p_s, s étant la S. des ind.)

§ II. Représentation des imaginaires en Géométrie au moyen des groupes cyclo-projectifs.

16. On appelle ~~point~~ élément imaginaire d'une figure uniforme un groupe cyclo-projectif ordinaire $a_1 a_2 a_3 \dots a_n$ formé d'éléments réels de cette figure, en y joignant un sens déterminé. Les deux groupes $a_1 a_2 a_3 \dots a_n$ et $a_1 a_n \dots a_3 a_2$ sont de sens opposés: ils représentent deux éléments imaginaires conjugués.

Si $b_1 b_2 \dots b_n$ est un autre groupe ordinaire appartenant à la même involution cyclique que $a_1 a_2 \dots a_n$, il représente le même élément imaginaire que ce dernier groupe, si leurs sens concordent. Il existe toujours un tel groupe partant d'un point donné (6.)

Définition de deux ~~[illegible]~~ involutions cycliques d'espèce différente en perspective de position et de sens. Il suffit que 2 groupes cycl. proj. soient en perspective, c.à.d. que 3 éléments consécutifs de l'un passent par 3 éléments consécutifs de l'autre (faisceaux de plans ou de rayons et séries de points). — On peut alors répéter ici le § 3 du premier mémoire.

17. Deux points imaginaires dont les porteurs réels se coupent (sans coïncider) déterminent toujours une droite imaginaire de 1re espèce (Répéter § 3, nos 13 et 14.)

Helmholtz.
Kronecker.
Bolzano (Stolz.)
Poincaré.
Weierstrass.
Dedekind.
Méray.
Carnot.
Lipschitz.
Schubert.
Bellavitis.
Mourey.
Faure.

Philosophische Aufsätze, Eduard Zeller zu seinem fünfzigjährigen Doctor-Jubiläum gewidmet.
Leipzig, Fues (Reisland) 1887.

H. von Helmholtz: Zählen und Messen, erkenntnisstheoretisch betrachtet. (p. 17–52)

L'auteur combat l'apriorisme kantien, selon lequel les axiomes de l'arithmétique et de la géométrie seraient des jugements synthétiques a priori déterminant l'intuition transcendantale de l'espace et du temps (partant indémontrables et invérifiables.)

Il a montré que les axiomes de la géométrie sont des propositions expérimentales (~~Il lui reste~~ ce qui ne ruine pas absolument la conception kantienne de l'espace comme forme d'intuition transcendantale) Il lui reste à étendre sa théorie empiriste aux axiomes arithmétiques, relatifs à l'intuition du temps.

Axiomes classiques de l'Arithmétique:

I. Deux grandeurs égales à une 3e sont égales entre elles.
II. Loi associative de l'addition: $(a+b)+c = a+(b+c)$
III. Loi commutative ——— : $a+b = b+a$
IV. Egal ajouté à égal donne une somme égale
V. Egal ajouté à inégal donne des sommes inégales.

Les 2 axiomes II et III se déduisent d'un seul (par induction complète):
Axiome de Grassmann (1) $(a+b)+1 = a+(b+1)$

Dans l'application des nombres aux grandeurs physiques, outre l'idée de grandeur et celle d'égalité, on fait intervenir celle d'unité. C'est une restriction inutile de cette application, attendu qu'elle suppose d'avance que les grandeurs physiques sont composées d'unités.

(1) Hermann Grassmann: die Ausdehnungslehre. Leipzig 1844, 1878. Robert Grassmann: die Formenlehre oder die Mathematik. Stettin, 1872

Schröder (Lehrbuch der Arithmetik und Algebra, Leipzig, 1873)
est le premier qui ait reconnu le postulat suivant lequel le nombre
d'un groupe d'objets est indépendant de l'ordre dans lequel on les
compte ; postulat admis comme un fait par les arithméticiens anté-
rieurs. — P. du Bois Reymond a développé une théorie antinomi[que]
de la grandeur (Théorie générale des fonctions, Tubingue, 1882).
L'auteur croit pouvoir lever les contradictions signalées par du [Bois]
Reymond. L'arithmétique pure est une méthode fondée sur des fa[its]
purement psychologiques, d'application d'un système de signes (nom[bres])
de l'étendue indéfinie et d'approximation (Verfeinerung) indéfini[e].
Elle cherche quelles sont les combinaisons de ces signes qui condui[sent]
au même résultat. Elle enseigne à remplacer des calculs extrêmem[ent]
compliqués, des opérations qui ne pourraient s'achever en aucun te[mps]
fini, par des opérations plus simples. Abstraction ~~faite de ses applica~~
~~c'est un pur~~ jeu de l'esprit sur des objets imaginaires. Mais ce systè[me]
de signes nous permet de représenter et de déterminer les rapports des
objets réels, avec autant d'approximation qu'on veut, et de calcu[ler]
au moyen des lois naturelles les valeurs numériques qui mesurent
le résultat d'un processus physique soumis à ces lois. — Quest[ion] :
Comment et à quelles conditions pouvons-nous exprimer les rapports
des objets réels par des nombres dénommés, comme des grandeurs ?
La question se dédouble : 1° Quel est le sens objectif de ce fait que nous
déclarons deux objets égaux sous certain rapport ? Quel caractère d[oit]
avoir une combinaison physique de 2 objets, pour qu'on puisse la consid[érer]
comme une addition des attributs comparables de ces objets, et ces attrib[uts]
eux-mêmes comme des grandeurs, 2° exprimables par des nombres dénom[més].
— La suite naturelle (régulière) des nombres est une suite de sig[nes]
arbitraires rangés dans un ordre déterminé (conventionnel d'ailleurs).
Numération (Zählen) suppose qu'on conserve par la mémoire la suite des term[es]
qui se sont succédé dans la conscience. — Ce sont les nombres ordinaux.
La suite n'a qu'un sens (einsinnig) elle n'est pas réversible (comme le cours d[u temps]).
Les termes précédents se distinguent des suivants ~~indifféremment~~ comme de la conscience le pas[sé]
de l'avenir.

(1) La suite naturelle des nombres entiers est illimitée.

Axiome VI: De deux nombres différents, l'un précède l'autre dans la suite naturelle: le premier est dit ~~plus bas~~ inférieur, le second ~~plus haut~~ supérieur. Les désignations: plus grand, plus petit, conviennent au nombre cardinal (Anzahl) et lui sont réservées pour plus tard.]

Le signe $(a+1)$ désigne le nombre qui suit immédiatement a

~~Le signe~~ $a=b$ signifie simplement que a est le même nombre que b. Donc, si: $a=b$, $c=b$, $a=c$ (axiome I)

Définition. $(a+b)$ est le nombre auquel on aboutit quand on compte $1, 2, 3 \ldots b$ à partir du nombre $(a+1)$ inclusiv[t].

$(a+1)$ correspond à 1.

$(a+1)+1 = a+(1+1) = a+2$ —— 2.

$(a+2)+1 = a+(2+1) = a+3$ —— 3.

enfin: $(a+b)$ —— b.

$(a+b)+1 = a+(b+1)$ [axiome de Grassmann]

Cet axiome résume l'opération précédente (Addition)

Une somme implique jusqu'ici un ordre déterminé des sommandes.

Le nombre $(a+1)$ est la somme de a et de 1.

La somme $(a+b)$ existe toujours & elle est unique (axiome IV.)

Elle est nécessairement supérieure à a.

Si c est un nombre ~~supérieur~~ à a, on doit l'atteindre en comptant à partir de a (exclusiv[t]); si c est le b[e] nombre après a, on a: $c=(a+b)$ D'où:

Axiome VII. Si un nombre c est supérieur à un nombre a, c est la somme du nombre a et d'un certain nombre b.

Théorème I. Loi d'association: $(a+b)+c = a+(b+c)$

Démonstration par l'induction complète, en partant de l'axiome de Grassmann — Les deux membres de l'égalité peuvent s'écrire $a+b+c$ (dans un ordre déterminé)

Généralisation: On étend la loi d'association à une somme d'un nombre quelconque de nombres.

---

(1) Il n'y a aucune raison pour interrompre la suite des nombres, ou pour revenir à un nombre antérieur. La théorie des nombres exclut les suites qui recommencent à un certain nombre, c.à.d. des suites qui se répètent périodiquement.

Théorème II : Loi de commutation : $1+a = a+1$.

Démonstration par induction complète (lettr. est vrai pour a

Théorème III : Loi de commutation : $a+b = b+a$

Démonstration par induction complète (lettr. est vrai pour $b=1$,

Démonstration de l'axiome V : Soit : $(a+b) = f$

$$c+f = c+(a+b) = (c+a)+b$$

Donc : $(c+a)$ est inférieur à $(c+f)$, comme $\underline{a}$ est infér à f. – On a aussi : $(f+c) = (a+c)+b$

En résumé : Si l'on ajoute différents nombres à un même nomb ou un même nombre à différents nombres on obtient des somm différentes.

Dans le procédé d'addition, on a fait correspondre (zuordn

la suite : $a+1, \quad a+2, \quad a+3, \ldots \ldots \quad a+b, \ldots$

à la suite naturelle : $1, \quad 2, \quad 3, \qquad b, \ldots$

sans changer l'ordre naturel des nombres de la première. On considère maintenant deux suites correspondantes (coordonnées) dont l'une sera la suite naturelle, et l'autre une suite de lettres dans un ordre quelconque (n'ayant pas d'ordre naturel.)

Permutations d'une suite coordonnée à la suite des nombres

A chaque nombre correspond une lettre, à chaque lettre un nombre. On peut, sans omettre ni répéter aucune lettre, intervertir l'ordre de deux lettres, correspondant à deux nombres consécutifs ; en répét cette permutation, on peut amener une lettre qcque au premier rang ou à tel rang qu'on voudra ; on peut enfin ranger la suite des lettres dans un ordre quelconque, en permutant toujours deux lettres voisines, et cela, sans lacune ni répétition.

Théorème IV. Les attributs de la suite que n'altère pas la permutation de deux lettres voisines ~~ne changent pour~~ ne sont altérés par aucun changement d'ordre de la suite, et restent invariables (~~sont~~ indépendants de l'ordre des éléments de la suite)

Corollaire : Généralisation de la loi commutative de l'addition.
Ainsi les 5 axiomes fondamentaux se trouvent déduits du concept de l'addition.

Concept du nombre (Anzahl) des éléments d'un groupe :
Si, en faisant correspondre un nombre à chaque objet, on emploie la suite naturelle et complète des nombres de 1 à n, on dit que n est le nombre des objets (éléments) du groupe. (1)
Du théorème IV il résulte que le nombre des éléments d'un groupe ne change pas quand on change l'ordre de ces éléments.
Les objets nombrés ne doivent pas, pendant qu'on les compte, disparaître, se fondre les uns dans les autres, ou se diviser, etc. Chacun des objets doit constituer ~~un sujet~~ individu durable et reconnaissable.
Le nombre total des éléments de deux groupes qui n'ont aucun élément commun est égal à la somme des nombres des éléments de chacun d'eux (en vertu de la définition de l'addition)
Ainsi la conception de l'addition comme adjonction des unités d'un nombre b à celles d'un nombre a coïncide avec notre définition de l'addition ; mais celle-ci est dégagée de tout appel à l'expérience, et ne repose que sur l'intuition interne (?)
De même le concept du nombre, tiré du dénombrement d'objets extérieurs, se ramène à notre concept du nombre abstrait ordinal.

Soustraction. La différence $(a - b)$ est le nombre qu'il faut ajouter à b pour trouver a.
Les nombres étant conçus comme signes d'une suite indéfinie, on peut continuer la régression (soustraction) indéfiniment, en admettant les nombres $0, -1, -2, \ldots$ résultats de la soustraction successive de l'unité, qui marquent autant de pas en arrière. (2)
La différence de deux nombres ~~devient alors univoque et~~ est alors toujours possible, et déterminée d'une manière univoque.

(1) Cf. Dedekind, Was sind und was sollen die Zahlen ?
(2) Cf. Argand, Représentation des quantités imaginaires.

Multiplication (définie par la répétition de l'addition.)

Lois de la multiplication : $1.a = a$

$$(b+1).a = b.a + a$$

Analogie des lois de l'addition et de la multiplication :

associative $(a+b)+c = a+(b+c)$ $\quad (a.b).c = a.(b.c)$

Commutative $a+b = b+a$ $\quad a.b = b.a$

Mais l'analogie ne subsiste pas quand on combine n nombres égaux à a : par l'addition, on obtient le produit $n.a$, qui est commutatif ; par la multiplication, on obtient la puissance a^n, qui n'est pas commutative. – Analogie des lois distributives

$$(a+b).c = (a.c)+(b.c)$$
$$(a.b)^c = (a^c).(b^c)$$

Nombres dénommés. Quand on compte des objets égaux, chacun d'eux est considéré comme une unité ; leur nombre est alors un nombre dénommé (suivant la nature de ses unités). La somme de deux nombres dénommés de même espèce est un nombre dénommé de même espèce.

Si deux groupes d'unités de même espèce ont le même nombre, ils sont dits égaux. S'ils ont des nombres différents, celui qui a le nombre supérieur est dit plus grand, celui qui a le nombre inférieur est dit plus petit.

On appelle grandeurs des objets ou attributs des objets qui sont comparables à d'autres semblables au point de vue de l'égalité ou de l'inégalité. – Si l'on peut les représenter par un nombre dénommé, ce nombre est dit leur valeur (numérique) : le procédé par lequel on obtient ce nombre s'appelle mesure de la grandeur. – Ce nombre exprime ~~le~~ rapport (Verhältnisszahl) de la grandeur à ~~l'~~une unité de grandeur de même espèce. Il rapporte en définitive la grandeur aux unités absolues arbitraires de la physique.

Comment arrive-t-on à mesurer les grandeurs ?

Égalité physique. Elle est caractérisée par l'axiome I :
Deux grandeurs égales à une troisième sont égales entre elles.
Il en résulte que l'égalité est commutative.

L'égalité entre les attributs comparables de deux objets est un cas exceptionnel ; elle se définit par une coïncidence (Zusammentreffen) ou une coopération (Zusammenwirken) des deux objets ~~dans~~ qui, dans certaines conditions, donnent lieu à un résultat observable.

Le procédé par lequel on observe ce résultat (identique ou non) produit séparément par les deux objets dans ~~des~~ les mêmes conditions est une méthode de comparaison. De l'axiome I il suit que le résultat de la comparaison doit rester invariable quand on permute les deux objets comparés.

Telles sont les conditions que doit remplir une méthode de comparaison pour permettre de constater des égalités jouissant des propriétés énoncées.

Il s'ensuit que des grandeurs égales peuvent se remplacer mutuellement.

Les grandeurs de même espèce (gleichartig) sont celles dont l'égalité et l'inégalité se constatent par la même méthode de comparaison (1)

Exemple : Les poids.

Distance de deux points. C'est la plus simple des figures géométriques mesurables. ~~Elle suppose que les~~ La méthode de comparaison des distances consiste dans la recherche de leur congruence (coïncidence). Elle suppose que les couples de points ~~sont reliés~~ qu'on compare ont des liaisons solides et fixes.

Une ligne droite est une ligne qui reste immobile quand on fixe deux de ses points. Ligne courbe. Longueur d'une droite = distance des deux points extrêmes. Si les points extrêmes de 2 droites coïncident, les 2 droites elles-mêmes coïncident. — Inégalité de 2 droites : on peut définir le sens de cette inégalité, mais non celui de l'inégalité de deux distances de points.

---

(1) Définition de l'égalité de H. Grassmann « Sont égaux les objets dont on peut toujours affirmer la même chose, ou plus gént, ceux qu'on peut substituer les uns aux autres dans le jugement » trop générale et trop vague selon Helmholtz.

Mesure du temps : au moyen de phénomènes physiques tels que, en se répétant de la même manière et dans les mêmes conditions, s'ils ont commencé dans le même instant, ils finissent aussi en même temps. (?)

Mesure des clartés (Helligkeiten) intensités lumineuses de champs éclairés (au photomètre) par l'indiscernabilité de leur frontière.

Mesure des hauteurs de tons (par les battements)

Mesure des intensités de courants électriques, par le galvanomètre différentiel.

L'axiome I n'est pas une loi objective, mais une condition à laquelle doivent satisfaire toutes les égalités physiques. Exemple : si l'on use deux plaques de verre l'une sur l'autre, l'une pourra être sphérique concave, l'autre convexe ; si on en use trois alternativement les unes sur les autres, elles ne pourront être que planes. De même pour obtenir des règles bien droites, on en frotte 3 l'une contre l'autre.

Combinaison additive des grandeurs physiques de même espèce.

Pour pouvoir mesurer des grandeurs, il faut définir leur addition.

1° La somme de deux grandeurs de même espèce doit être de même espèce, c.à.d. que si on remplace ces grandeurs par des grandeurs égales, on doit pouvoir s'assurer, par la même méthode de comparaison, que leur somme est restée égale à elle-même.

2°, 3° La combinaison physique des grandeurs doit satisfaire aux lois commutative et associative, pour qu'on puisse l'appeler addition. Si les deux premières conditions (1°, et 2° commutative) sont satisfaites, la troisième l'est aussi. En effet, si l'on doit combiner entre eux ~~tels~~ éléments d'une suite additive : a+b+c+ . . . . avant les autres, on peut les amener, par commutation, aux premières places. — En résumé :

Une combinaison physique de grandeurs de même espèce peut être considérée comme une addition, si le résultat de cette combinaison ne change pas quand on change l'ordre des éléments combinés ou quand on en remplace plusieurs par des grandeurs égales de même espèce.

La définition de l'addition détermine en général le sens de l'inégalité; car la méthode de comparaison ne permet que de reconnaître si deux grandeurs de même espèce sont égales ou inégales – Si deux grandeurs x sont égales, toutes les fonctions de x formées par les mêmes calculs seront aussi égales; mais on ne sait pas si, quand x augmentera, elles augmenteront ou diminueront.

Exemple: La même méthode de comparaison sert à constater l'égalité de résistance (W) et l'égalité de conductibilité (λ) de deux fils conducteurs: $W = \frac{1}{\lambda}$.

On ~~ajoute~~ additionne les résistances en mettant les fils bout à bout; on additionne les conductibilités en les juxtaposant ~~en réunissant~~ leurs extrémités de manière que le courant les traverse à la fois. La conductibilité et la résistance varient donc en sens inverse – De même les condensateurs, juxtaposés, ajoutent leur capacité; disposés en série ils ajoutent leur tension (potentiel) pour la même charge. La capacité et la tension varient en sens inverse.

« Il ne faut donc pas s'étonner que les axiomes de l'addition se vérifient dans la nature, puisque nous ne reconnaissons comme addition que les combinaisons physiques qui vérifient ces axiomes. »

Divisibilité des grandeurs et des unités.

Jusqu'ici nous n'avons pas considéré les grandeurs comme composées d'unités – En introduisant cette conception, on simplifie leur représentation, car on peut alors les exprimer par des nombres dénommés.

Les grandeurs qui se laissent ajouter se laissent en général diviser. On peut remplacer chaque grandeur par la somme de ses parties – Si ces parties sont égales dans chaque grandeur et dans les différentes grandeurs de la même espèce, leur nombre suffira à définir chaque grandeur (1). Ces parties s'appellent des unités.

Si toutes les grandeurs ne sont pas exactement divisibles en unités,

---

Toute différence (ou relation) entre les grandeurs se réduit à des différences (ou relations) de nombres.

on divise les unités en sous-unités ; d'où les fractions. Les nombres rationnels permettent de mesurer une grandeur avec autant d'approximation qu'on veut. Mais ils ne mesurent exactement que les grandeurs commensurables.

~~Il existe~~ Il peut exister des grandeurs incommensurables ; leur rapport à l'unité ne peut alors s'exprimer exactement en nombres rationnels, mais on peut le resserrer entre deux nombres rationnels aussi rapprochés qu'on veut. Cela suffit pour le calcul des fonctions différentiables de variables continues ; mais non pour certaines fonctions discontinues, qui ne permet pas de représenter l'approximation indéfinie d'un nombre irrationnel par des nombres rationnels.

— Valeurs numériques des propriétés (constantes physiques, coefficien[ts]

Il y a, outre les grandeurs susceptibles d'addition, des rapports qu'on peut représenter par des nombres sans définir leur combinaison additive. Ils dépendent en général de la nature particulière d'un corps, des propriétés d'une substance, etc.

Exemple : indice de réfraction : c'est un rapport entre grandeurs mesurables (sinus des angles d'incidence et de réfraction) ; ~~que~~ le nombre qui l'exprime diffère suivant les substances : il définit une propriété de chaque substance : son pouvoir réfringent. De même densités ou poids spécifiques, pouvoir conducteur de la chaleur et de l'électricité, capacité de chaleur, etc. — Il faut y joindre les constan[tes] de l'intégration de la dynamique, qui restent invariables ~~pendant~~ durant tout le mouvement d'un système fermé.

On a ramené toutes les valeurs numériques ~~aux~~ à des unités qui dépendent des trois unités fondamentales (temps, longueur, masse). La différence entre les coefficients physiques et les grandeurs mesurables n'est pas absolue, car les uns comme les autres se traduisent par des nombres dénommés ; de plus, on peut trouver d'un genre à l'autre ~~une~~

une combinaison additive de certaine propriété, qui ~~fait~~ transforme les coefficients correspondants en grandeurs mesurables. Cette différence rappelle la distinction métaphysique entre les grandeurs extensives et intensives. P. du Bois Reymond appelle les premières linéaires, les secondes non linéaires.

Pour définir des coefficients physiques, il faut auparavant avoir défini des grandeurs mesurables (additives) car c'est de leur comparaison avec ces grandeurs mesurables qu'on déduit la valeur numérique des coefficients.

Addition des grandeurs hétérogènes (ungleichartig) composées de grandeurs simples appartenant à diverses espèces additives —
Exemple : les vecteurs dans le plan et dans l'espace (composantes, résultante). La somme de ces grandeurs s'obtient en additionnant séparément leurs composantes et en ~~en~~ formant la résultante de toutes les sommes. Toutes les combinaisons physiques de grandeurs telles, que le résultat ne dépende que de la grandeur et de la direction de la résultante finale reposent sur des combinaisons additives de ce genre. Exemples : pour 2 dimensions les imaginaires de Gauss ; pour plus de 2 dimensions addition des ~~grandeurs~~ vecteurs géométriques (Strecken) de H. Grassmann et le calcul des quaternions, de R Hamilton. La loi commutative doit être vérifiée : ainsi on peut combiner en une résultante deux rotations infiniment petites ou deux vitesses de rotation (d'axes différents) mais non deux rotations finies (dont l'ordre n'est plus indifférent).

~~Représentation~~ Conception des couleurs comme résultant du mélange de couleurs principales : d'où représentation géométrique des couleurs du mélange par des constructions de points matériels, ds un système de 3 axes (Newton).

Multiplication de nombres dénommés.
On peut multiplier un nombre dénommé ax (x désigne l'espèce d'unité) par un nombre pur (abstrait) n : le produit na est un nombre dénommé de même espèce : $nax = anx$ (c.à.d. n fois ax = a fois nx)

$(m+n)ax = max + nax$ $\qquad$ $n(ax+bx) = nax + nbx$

La multiplication de deux ou plusieurs nombres dénommés n'a un sens déterminé que lorsqu'il existe des combinaisons physiques entre les unités correspondantes, qui vérifient les 3 lois de la multiplication (commutative, associative, distributive) – Exemples (si $\underline{l}$ désigne une longueur, t un temps, $\underline{m}$ une masse):

une surface est ~~représentée par~~ mesurée (dénommée) par —— l^2

un volume —— l^3

une vitesse —— $\frac{l}{t}$

une force —— $\frac{ml}{t^2}$

un travail —— $\frac{ml^2}{t^2}$

une pression sur une surface —— $\frac{m}{lt^2}$

une tension dans une surface —— $\frac{m}{t^2}$

une densité —— $\frac{m}{l^3}$

une quantité magnétique —— $\frac{l}{t}\sqrt{ml}$

une force magnétique —— $\frac{l}{t}\sqrt{\frac{m}{l}}$

– La plupart de ces combinaisons reposent sur la détermination de certains coefficients; mais beaucoup de ces grandeurs peuvent aussi être obtenues par des combinaisons physiques additives (vitesses, courants, forces, pressions, densités, etc.) Mais toutes ces unités définies par multiplication sont hétérogènes à celles qui les engendrent, et ne ~~se comprennent~~ s'expriment même que par la connaissance de certaines lois géométriques ou physiques.

Dans les grandeurs dirigées (Grassmann, Ausdehnungslehre) et les quaternions, la multiplication n'est plus commutative. Elle obéit à la loi: $\quad ab = -ba$

Le produit de 2 vecteurs est l'aire de leur parallélogramme ~~et sa~~ cette aire peut être positive ou négative (suivant le sens de la rotation de $\underline{a}$ en $\underline{b}$.)

Helmholtz: Zählen und Messen. Extraits textuels.

p. 20. « Je considère l'Arithmétique, ou science des nombres purs, comme une méthode construite sur des faits purement psychologiques, qui enseigne l'application régulière (folgerichtig) d'un système de signes (à savoir des nombres) d'une étendue illimitée et d'une possibilité indéfinie de raffinement (Verfeinerung). L'arithmétique recherche notamment quelles manières différentes de combiner ces signes (opérations de calcul) conduisent au même résultat final. Cela apprend, entre autres choses, à remplacer aussi par des plus simples des calculs extraordinairement compliqués, même ceux qui ne pourraient se terminer en au un temps fini. » Abgesehen (v. Husserl p. 192)

p. 21. La suite normale des nombres. (Husserl, p. 191.)

p. 22. La suite est à sens unique (Eindeutigkeit der Folge) « Dans la suite des nombres les pas en avant et les pas en arrière ne sont pas ~~la même~~ ~~équivalents~~ des processus équivalents, mais essentiellement ~~différents~~, comme la suite des perceptions dans le temps; tandis que ~~dans~~ sur les lignes qui résident ~~dans l'espace~~ en durant au dans le temps (sans changement), les deux directions possibles de déplacement (Fortschreiten) ne sont pas distinctes l'une de l'autre. En fait, dans notre conscience, chaque acte présent, soit perception, sentiment ou volition, coopère (zusammenwirken) avec les images-souvenirs des actes passés, mais non des actes futurs qui à ce moment ne sont pas encore présents dans la conscience; et ~~l'acte présent~~ ~~nous~~ nous conscience de l'acte présent comme spécifiquement différent des images de la mémoire qui sont à côté de lui. Par là la

représentation présente est opposée comme la suivante aux précédentes, dans un contraste qui tient à la forme d'intuition du temps ; rapport qui n'est pas réversible et auquel est nécessairement soumise toute représentation qui entre dans notre conscience. Dans ce sens l'ordination (Einordnung) dans la suite du temps est la forme inévitable de notre intuition interne »

p. 33. « Seulement il faut que les objets, aussi longtemps du moins que le résultat d'un dénombrement effectué doit être valable, satisfassent en fait à certaines conditions afin qu'ils soient nombrables. Ils ne doivent pas disparaître, ou se fondre avec d'autres, ou un se diviser en deux, ou de nouveaux venir s'ajouter, de sorte qu'à chaque nom (donné sous forme d'une lettre grecque) corresponde, d'une manière durable, un objet, et un seul, délimité, permanent et reconnaissable comme unique. Quant à savoir si ces conditions sont remplies dans une classe déterminée d'objets, c'est ce qu'on ne peut naturellement déterminer que par expérience »

« Le concept de l'addition, décrit plus haut, coïncide donc en fait avec le concept qui résulte de la détermination du nombre total de plusieurs groupes d'objets nombrables ; mais il a l'avantage de pouvoir être acquis sans ~~emprunt~~ relation (Beziehung) à l'expérience externe. * — Ainsi se trouve démontrée la suite des axiomes de l'addition, nécessaires pour fonder l'arithmétique, pour le concept de nombre et de somme dont nous sommes partis, et qui n'est emprunté qu'à l'intuition interne ; et en même temps ~~se peut déduire~~ l'accord du résultat de cette sorte d'addition avec celle que l'on peut tirer du dénombrement d'objets extérieurs nombrables » (p. 34.)

p. 41 : « Le premier axiome : « Si deux grandeurs sont égales à une troisième, elles sont égales entre elles » n'est pas une loi ayant une signification objective ; ~~il~~ il détermine seulement quelles relations nous pouvons (dürfen) reconnaître comme égalités. »

p. 45 : « Nous ne pouvons (dürfen) pas nous étonner si les axiomes de l'addition se vérifient dans le cours de la nature, puisque nous ne reconnaissons comme addition que les combinaisons physiques qui satisfont aux axiomes de l'addition. »

p. 35 : — Nombres dénommés.

« Le dénombrement d'objets (Stücke) inégaux ... ne sert, en règle générale, qu'à vérifier que leur nombre est complet (zur Feststellung ihrer Vollzähligkeit.) — Le dénombrement d'objets égaux ~~est~~ a une importance bien plus grande et une application plus étendue. Ces objets, qui sont égaux sous un rapport quelconque, et sont nombrés (connumerés), nous les appelons unités du dénombrement. nous désignons leur nombre (Anzahl) comme un nombre dénommé, et l'espèce particulière des unités qu'il contient (est) la dénomination du nombre. »

p. 36. « Nous nommons **grandeurs** des objets ou attributs d'objets, qui comparés à d'autres admettent la distinction du plus grand, égal ou plus petit. ~~Si~~ Si nous pouvons les exprimer par un nombre dénommé, nous appelons celui-ci la valeur de la grandeur ; l'opération par laquelle nous trouvons le nombre dénommé, mesure (mensuration) de la grandeur. »

Divisibilité des grandeurs et des unités.

p. 45. « Jusqu'ici nous n'avons pas encore eu besoin de décomposer les grandeurs en unités. Le concept de la grandeur, ainsi que de

(son) leur égalité et de (son) leur addition, a pu être acquis sans cette décomposition. Mais la suprême simplification de la représentation des grandeurs ne peut être obtenue que si nous les résolvons en unités et les exprimons en nombres dénommés.

p. 52 : « Le fait que nous représentons un rapport physique quelconque comme grandeur ne peut jamais reposer que sur la connaissance empirique de ~~certains côtés de~~ la manière dont il se comporte sous certains côtés dans sa ~~coïncidence~~ rencontre ou sa coopération avec d'autres. J'y comprends la congruence de deux grandeurs spatiales, qui existent ~~dans~~ à-dedans des corps ou sont limitées par des corps (dans le sens de mes travaux antérieurs sur les axiomes de la géométrie), comme un rapport physique qui est à constater empiriquement. Pour pouvoir les exprimer par des nombres dénommés, il nous faut connaître 1° la méthode de comparaison des grandeurs en question, par laquelle leur espèce est caractérisée ; 2° soit les méthodes de combinaison additive, soit les lois naturelles où elles figurent comme coefficients.

La grande simplification et systématisation (Uebersichtlichkeit) de l'appréhension (Auffassung), que ~~nous~~ obtenons en ramenant la multiplicité bariolée des objets et des variations à des rapports quantitatifs, ~~et~~ a sa racine profonde dans l'essence de notre formation des concepts. Quand nous formons le concept de une classe, ~~nous~~ embrassons en lui tout ce qui est égal (pareil, gleich) dans les objets qui appartiennent à cette classe. Quand nous concevons un rapport physique comme un nombre dénommé, nous avons aussi éloigné du concept de ses unités toutes ~~les~~ diversités qui leur sont attachées dans la réalité. Elles sont des objets que nous considérons seulement comme des exemplaires de leur classe, et dont l'efficacité dans la direction recherchée ~~ne~~ dépend aussi seulement de ce fait qu'elles sont de tels exemplaires. Dans les grandeurs formées de ces unités il ne subsiste ~~donc~~ alors que la plus fortuite (1) des différences, celle du nombre » — Fin.

(1) Zufällig = accidentel, contingent.

ronecker: Sur le concept de nombre (1887)
xtrait du Journal de Crelle, tome 101, pp. 337-355.)
ation d'une lettre de Jacobi à Humboldt (trouvée dans le
achlass de Lejeune-Dirichlet)(1846, découverte de Neptune par Leverrier)

Archimedes und der Jüngling

Zu Archimedes kam ein wissbegieriger Jüngling:
Weihe mich, sprach er zu ihm, ein in die göttliche Kunst,
Die so herrliche Dienste der Sternenkunde geleistet,
Hinter dem Uranos noch einen Planeten entdeckt.»
Göttlich nennst du die Kunst, sie ist's, versetzte der Weise,
Aber sie war es, bevor noch sie den Kosmos erforscht,
Ehe sie herrliche Dienste der Sternenkunde geleistet,
Hinter dem Uranos noch einen Planeten entdeckt.
Was du im Kosmos erblickst, ist nur der Göttlichen Abglanz,
In der Olympier Schaar thronet die ewige Zahl.»
(Parodie d'une poésie de Schiller dans les Xénies:
Archimedes und der Schüler.)

uss: « La mathématique est la reine des sciences et l'arithmétique
reine des mathématiques.» - « Ο Θεος αριθμητιζει.»
ité ap. Gauss's zum Gedächtniss, Sartorius von Waltershausen
Leipzig, 1856, p. 97.)

uss (dans une lettre à Bessel, 1829): « Si le nombre est
pur produit de notre esprit, l'espace a aussi ~~une réalité~~ hors
otre esprit, une réalité dont nous ne pouvons ~~déterminer~~ pas assigner
is complètement a priori.» Cf discours de Ernst Schering
ril 1877, à la Société royale des Sciences de Göttingue

Définition du nombre

§1. _ Le point de départ naturel du concept de nombre est le nombre ordinal. La suite des nombres ordinaux est un ensem de désignations que nous appliquons à toute série d'objets distincts et rangés en ordre. ~~La réunion~~ L'ensemble des désignations employées dans l'énumération d'une troupe (Schaar) d'objets constitue le nombre de ces objets, et est indiqué par la d des désignations employées. Les nombres cardinaux dérivent des nombres ordinaux. D'ailleurs ceux-ci forment ~~eux-mêmes~~ une troupe, déterminé par le dernier d'entre eux. Un m est dit plus petit qu'un nombre n, si le nombre ord correspondant à m vient avant le nombre ordinal de La « suite naturelle des nombres » n'est autre que la suite d nombres ordinaux correspondants.

[La numération usuelle ayant pour but d'exprimer le plus de possibles avec le moins de signes ou de mots possible, est un tab à double entrée : 9 lignes et 5 colonnes suffisent à désigner les nombres jusqu'à 99999, soit 14 mots en tout. Exemp que l'on marque des points dans les lignes : 3, 2, 4, 5, 6
et dans les colonnes : V, IV, III, II, I
on détermine le nombre 32456 (τρισ-μυριοι δισ-χιλιοι τετρα πεντηκοντα εξ.)] 13 mots seulement, les unités n'ayant pas de nom.

§2. _ Le nombre est indépendant de l'ordre suivi dans l'énuméra Quand on compte une troupe d'objets, en appliquant ~~les~~ la suite des nomb ordinaux aux objets pris un à un, on ~~donne~~ leur assigne aux o un certain ordre. Si l'on permute l'ensemble des n ordinaux ainsi employés et qu'on les applique de nouveau aux obj rangés dans le même ordre, cela revient à les compter d un ordre différent (Kronecker se dispense ainsi de suppos

commutabilité des objets.) Comme l'ensemble des désignations employées reste le même, le nombre des objets est identique, et par suite indépendant de l'ordre suivi pour compter les objets. Si on nomme systèmes équivalents des collections d'objets telles que leurs éléments se correspondent un à un, leur ordre étant différent, le nombre de ces éléments est le seul invariant entre les systèmes équivalents.

[Lipschitz, Lehrbuch der Analysis: (Bonn, 1877) Si dans la considération de choses séparées on fait abstraction des signes (caractères) (Merkmale) par lesquels ces choses se distinguent, il reste le concept du nombre des choses considérées.]

— L'addition — Ajouter n_2 à n_1, c'est compter n_2 en partant de n_1+1, dans la suite naturelle des nombres. Il faut montrer que: $n_2+n_1 = n_1+n_2$, ou généralement:

$n_1+n_2+\dots+n_r = n_\alpha+n_\beta+\dots n_\rho$, $\alpha, \beta, \dots \rho$ étant les nombres $1, 2, \dots r$ rangés dans un autre ordre.

Or, si l'on forme le tableau complet des systèmes de 2 n. (h, k) obtenus en faisant:

$$\begin{cases} h=1, & k=1, 2, \dots n_1, \\ h=2, & k=1, 2, \dots n_2, \\ \dots & \dots \\ h=r, & k=1, 2, \dots n_r, \end{cases}$$

on trouve que leur nombre est: $n_1+n_2+\dots+n_r$. Si l'on forme le groupe des systèmes obtenus en faisant:

$$\begin{cases} h=\alpha, & k=1, 2, \dots n_\alpha, \\ h=\beta, & k=1, 2, \dots n_\beta, \\ \dots & \dots \\ h=\rho, & k=1, 2, \dots n_\rho, \end{cases}$$

on trouve que leur nombre est: $n_\alpha+n_\beta+\dots+n_\rho$. Or les 2

tableaux contiennent les mêmes éléments, ce qui démontre [illegible]

§4 — Multiplication : Si les r nombres $n_1\, n_2 \ldots n_r$ sont égaux à un même n, l'addition de ces r nombres s'appelle multiplication de n par r ; $n_1 + n_2 + \ldots + n_r = rn$.

Il faut démontrer que le produit de n par r = prod de r par n ; généralement que le prod de $n_1\, n_2 \ldots n_r$ est indépendant de l'ordre des facteurs.

Qu'on forme tous les systèmes de r nombres $(h_1\, h_2, \ldots h_r)$ obtenus en donnant à :

$$\begin{cases} h_1 \text{ les valeurs } 1, 2, \ldots n_1 \\ h_2 \text{ ——— } 1, 2, \ldots n_2 \\ \text{— — — — —} \\ h_r \text{ ——— } 1, 2, \ldots n_r \end{cases}$$

et qu'on les range dans l'ordre de grandeur de la quantité : $h_1 g^{r-1} + h_2 g^{r-2} + \ldots + h_{r-2} g^2 + h_{r-1} g \ldots$ (c.à.d. du nombre $h_1 h_2 \ldots h_r$ ds le syst. à base g, g étant plus [grand] que $n_1, n_2, \ldots n_r$.) (1) Soit s_1 le nombre des syst. où $h_1 = 1$; il y a donc le n. total est : $n_1 s_1$. Soit s_2 le nombre des syst où $h_1 = \ldots$ il y en a n_2 [pour autant] où $h_1 = 1$, $h_2 = 1, 2, \ldots n_2$; c.à.d. que : $s_1 = n_2 \ldots$ donc le n total est : $n_1 n_2 s_2$; et ainsi de suite ; on trouve que le [n.] total est $n_1 n_2 \ldots n_r$.

Si maintenant $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \rho$ désignent les n. $1, 2, 3, \ldots$ rangés dans un autre ordre, et qu'on range les syst. $h_\alpha h_\beta \ldots$ (les mêmes que ci-dessus) dans l'ordre de grandeur du nombre $h_\alpha h_\beta \ldots h_\rho$ ds le syst. à base g, on trouvera de même que le nombre total de ces systèmes est : $n_\alpha n_\beta \ldots n_\rho$,

$$n_1 n_2 \ldots n_r = n_\alpha n_\beta \ldots n_\rho .$$

(1) Ce principe de classement équivaut au principe de l'ordre alphabétique employé [dans] les dictionnaires, si l'on représente $1, 2, 3, \ldots$ par $a, b, c, \ldots$

Le calcul algébrique.

L'introduction des indéterminées (Gauss) permet d'~~éviter~~ rejeter les concepts étrangers à l'arithmétique pure, à savoir ceux [de] nombres négatifs, fractionnaires et algébriques réels ou imaginaires.

On évite le concept de nombre négatif en remplaçant le [fact]eur -1 par une indéterminée x, et l'égalité par une [congr]uence modulo $(x+1)$: $7-9 = 3-5$

[dev]ient :

$$7+9x \equiv 3+5x \pmod{x+1}$$

[Inver]sement, cette congruence devient l'égalité précédente, quand [on] détermine x par la condition : $x+1=0$.

[(Voir] Hermann Schubert, System der Arithmetik und Algebra, Potsdam 1885.)

On évite le concept de nombre fractionnaire en remplaçant [le f]acteur $\frac{1}{m}$ par une indéterminée x_m et l'égalité par la [congr]uence : les règles de l'addition, de la mult^on et de la division :

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{n} = \frac{an+bm}{mn}$$

$$\frac{a}{m} \cdot \frac{b}{n} = \frac{ab}{mn}$$

$$\frac{a}{m} : \frac{b}{n} = \frac{an}{bm}$$

[sont] fondées sur les congruences :

$$ax_m + bx_n \equiv (an+bm)x_{mn} \quad (\text{modd. } mx_m-1,\ nx_n-1,\ mnx_{mn}-1)$$

$$ax_m \cdot bx_n \equiv abx_{mn} \quad (\text{modd. } mx_m-1,\ nx_n-1,\ mnx_{mn}-1)$$

$$ax_m \cdot \cancel{bx_n}\, x_{bx_n} \equiv anx_{bm} \quad (\text{modd. } mx_m-1,\ nx_n-1,\ bmx_{bm}-1,\ bx_n x_{bx_n}-1)$$

[Ces] congruences résultent elles-mêmes des 3 identités suivantes :

$$ax_m + bx_n = (an+bm)x_{mn} + an\,x_{mn}(mx_m - 1) + bm\,x_{mn}(nx_n -$$
$$-(ax_m + bx_n)(mnx_{mn} - 1)$$
$$ax_m \cdot bx_n = abx_{mn} + abnx_n x_{mn}(mx_m - 1) + abx_{mn}(nx_n - 1$$
$$- abx_m x_n (mnx_{mn} - 1)$$
$$ax_m \cdot x_{bx_n} = anx_{bm} + anx_{bm}(mx_m - 1) - abm\,x_m x_{bm} x_{bx_n}(nx_n -$$
$$- ax_m x_{bx_n}(bmx_{bm} - 1) + amn\,x_m x_{bm}(bx_n x_{bx_n} -$$

L'inégalité des fractions dérive de la règle d'addition

III Introduction des nombres algébriques (cf. Éléments de théorie ~~et~~ arithmétique des grandeurs algébriques t. 92, p 1[illegible]

Théorème : 1° Soit : $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$ une fonction entière à coefficients entiers de x ; $f'(x)$ sa dé[rivée]

D la valeur absolue de son discriminant ;

2° Soient $\varphi(x)$, $\varphi_1(x)$ des fonctions à coefficients entiers de respectivement de degré $(n-2)$ et $(n-1)$:

$$\varphi(x) = \sum_0^{n-2} \alpha_k x^k, \qquad \varphi_1(x) = \sum_0^{n-1} \alpha'_k x^k$$

telles qu'on ait l'égalité : $\varphi(x) f(x) + \varphi_1(x) f'(x) = D$

3° Soient les fonctions $f_1(x,y)$, $\psi(x,y)$ définies par les ég[alités]

$$f(x+y) - f(x) = y f_1(x,y), \quad [f_1(x,y) - f'(x)]\,\varphi(x) = y\,\psi(x,y)$$

de sorte que dans leurs développements :

$$f_1(x,y) = \sum_{h,k} b_{h,k}\, x^h y^k \qquad (h, k = 0, 1, 2, \dots\, n-1)$$
$$\psi(x,y) = \sum_{h,k} c_{h,k}\, x^h y^k \qquad (h, k = 0, 1, 2, \dots\, 2n-4)$$

les coefficients b et c désignent des nombres entiers ;

Soit $|a_g|$ la plus grande des valeurs $|a_0|, |a_1|, \ldots |a_{n-1}|$,
[et] $\underline{s}$ le plus petit nombre positif entier qui satisfait aux [...]tés de condition :

$$(s-1)\, D\, |a_n|^{n-2} \geqq \sum_h |\alpha_h| \left(|a_g| + |a_n|\right)^h \qquad (h = 0, 1, 2, \ldots n-2)$$

$$(s-1)\, D\, |a_n|^{n-1} \geqq \sum_h |\alpha'_h| \left(|a_g| + |a_n|\right)^h \qquad (h = 0, 1, 2, \ldots n-1)$$

$$(s-1)\, D\, |a_n|^{n-1} \geqq \sum_{h,k} |b_{h,k}| \left(|a_g| + |a_n|\right)^h \qquad (h, k = 0, 1, 2, \ldots n-1)$$

$$(s-1)\, D\, |a_n|^{n-1} \geqq \sum_{h,k} |c_{h,k}| \left(|a_g| + |a_n|\right)^h \qquad (h, k = 0, 1, 2, \ldots 2n-4)$$

[Alo]rs on ne peut avoir : $\text{sign.} f(x') = -\,\text{sign.} f(x'') = \text{sign.} f(x''')$

$$x' < x'' < x''' \,, \qquad \text{et} \qquad x''' - x' \leqq \frac{1}{s}.$$

[Don]c $f(x)$ garde son signe dans tout intervalle de grandeur [...] si elle a le même signe aux deux extrémités, et elle ne [chan]ge qu'une fois de signe, si elle a des signes différents aux extrémités. De plus dans ce second cas, si $\underline{r}$ désigne un [nom]bre entier positif arbitraire, on peut déterminer dans l'intervalle un intervalle partiel de grandeur $\dfrac{1}{rsD}$ tel, que la fonction y change [de si]gne, et y reste en valeur absolue inférieure à $\dfrac{1}{r}$. Enfin la [f]onction $f(x)$ prend le signe de $a_n x^n$, dès que l'on a :

$$|x| > \frac{|a_g| + |a_n|}{|a_n|} = R.$$

[Par] suite, si $\underline{t}$ est un nombre entier déterminé par les inégalités : ⊕

$$s\left(|a_g| + |a_n|\right) \leqq t\,|a_n| < |a_n| + s\left(|a_g| + |a_n|\right)$$

[la fon]ction $f(x)$ ne peut changer de signe que dans un ~~seul~~ des intervalles :

$$\left(\frac{k-1}{s}, \frac{k}{s}\right) \quad \text{où} \quad k = -t+1, -t+2, \ldots t-1, t.$$

⊕ [...] que t est le nombre entier immédiatement supérieur à Rs, de sorte que $\dfrac{t}{s}$ est la valeur approchée par excès de R à moins de $\dfrac{1}{s}$ près.

Il suffit donc de déterminer les signes des 2t valeurs
$f\left(\frac{k}{s}\right)$ $\qquad (k = -t+1, -t+2, \dots t-1, t)$
pour obtenir ceux des $(2t-1)$ intervalles où la fonction change de signe, et l'on sait qu'elle n'en change qu'une fois en chacun d
Le nombre de ces intervalles est celui des racines réelles de l'éq

$$f(x) = 0$$

Le théorème précédent permet de déterminer des intervalles (partiels) où la fonction change de signe et de plus reste en val. abs. infér. à
c.à.d. d'isoler les racines et d'en obtenir des valeurs aussi approchées qu'on le veut.

L'existence des nombres algébriques irrationnels est fondée sur celle des racines réelles d'une équation algébrique à coefficients entiers. Leur
résulte de l'ordre des intervalles où chacun des 2 n. irrationnels comparés, considérés comme racines d'une même éq., se trouve iso
— Pour rendre cette déduction tout à fait rigoureuse, on peut se p
de valeurs fractionnaires en posant : $x = \frac{z}{y}$; alors

$f(x) = f\left(\frac{z}{y}\right)$ devient : $\frac{1}{y^n} F(y, z)$

F fonction homogène où y, z ne prennent que des valeurs entières.

— Dans les résultats de l'arithmétique générale ou de la « théorie des fonctions entières à coefficients entiers d'indéterminées » on peut voir qu'une réunion systématisation de tous les résultats qu'on obtient en attr
aux indéterminées des valeurs entières. — ~~Cette théorie~~ ~~ces résultats~~ Cette théorie se rattache à ~~la~~ l'arithmétique spéciale ordinaire, et tous ses résultats peuvent s'exprimer (sous une forme simple) par les propriétés ~~simples~~ des nombres entiers.

卐 Ces 4 inégalités signifient que s est le nombre entier qui dépasse d'au 1 unité les 4 fractions rationnelles : $\frac{f_1(R,1)}{D}$, $\frac{\varphi(R)}{D}$, $\frac{\varphi_1(R)}{D}$, $\frac{\psi(R)}{D}$
où : $R = \frac{|a_g| + |a_n|}{|a_n|}$
et où l'on a remplacé les coefficients de $f_1, \varphi, \varphi_1, \psi$ par leurs valeurs absolues

O. Stolz (in Innsbruck). Bernhard Bolzano's Bedeutung in der Geschichte der Infinitesimalrechnung.

Mathematische Annalen, t. XVIII (1881)

Bolzano (né à Prague en 1781, mort à Prague en 1848)

1. Beiträge zu einer begründeten Darstellung der Mathematik. Prague 1810.

2. der binomische Lehrsatz, und als Folgerung aus ihm der polynomische und die Reihen, die zur Berechnung der Logarithmen und Exponentialgrössen dienen, genauer als bisher erwiesen. Prague 1816.

3. Rein analytischer Beweis, des Lehrsatzes, dass zwischen je zwei Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege. Prague 1817.

4. die drei Probleme der Rectification, der Complanation und der Cubirung ohne Betrachtung des unendlich Kleinen, ohne die Annahmen des Archimedes und ohne irgend eine nicht streng erweisliche Voraussetzung gelöst, zugleich als Probe einer gänzlichen Umgestaltung der Raumwissenschaft allen Mathematikern zur Prüfung vorgelegt. Leipzig, 1817.

5. Dr Bernhard Bolzano's Paradoxien des Unendlichen herausgegeben aus dem schriftlichen Nachlasse des Verfassers von Dr Fr. Přihonsky. Leipzig, 1851.

— Dans les Beiträge, on trouve l'addition de deux nombres fondée sur l'axiome de Grassmann: $a+(b+1)=(a+b)+1$. (cf. Hankel, Theorie der complexen Zahlensysteme, p. 37.) Hankel attribue à Bolzano la priorité sur Cauchy dans la juste conception de la théorie des séries infinies.

Bolzano, comme Cauchy, a ignoré la notion de convergence uniforme, introduite par Weierstrass. C'est Seidel qui a remarqué la convergence non uniforme des séries.

(2.) Lemme général pour l'égalité de deux nombres.

Si dans l'équation: $A + \omega = B + \omega'$
les grandeurs ω, ω' peuvent devenir aussi petites qu'on veut, tandis que A et B restent invariables, on a rigoureusement

$$A = B.$$

— Limite supérieure d'une variable. —

(3.) Théorème. Si une propriété M n'appartient pas à toutes les valeurs d'une variable x, mais à toutes celles qui sont plus petites qu'une certaine valeur u, il y a toujours une grandeur U qui est la plus ~~grande~~ petite de celles dont on peut dire que toutes celles qui leur sont inférieures possèdent la propriété M.

Bolzano remplace par ce théorème l'axiome faux que voici:

Si une propriété M n'appartient pas à toutes les valeurs de x, mais à toutes celles qui sont plus petites qu'une certaine valeur, il y a toujours une valeur maxima qui possède la propriété M.

La grandeur U est, selon Weierstrass, la limite supérieure de toutes les valeurs de x qui possèdent la propriété M. D'où la proposition:

« Si toutes les valeurs (en nombre infini) d'une variable x sont inférieures à un nombre A, il y a un nombre fini U, et un seul, tel qu'aucune des valeurs de x ne la dépasse, mais qu'il y en ait au moins une, dont la différence avec U soit moindre que ~~tout~~ n'importe quel nombre positif ε aussi petit qu'on veut »

Cf. Dini, Fondamenti per la teorica delle funzioni... Pisa, 1878.
Duhamel, des Méthodes dans les sciences de raisonnement, II, p. 113
Darboux, Mémoire sur les fonctions discontinues

Corollaire : Si une fonction croît constamment quand la variable x tend vers la limite a, mais reste inférieure à un nombre fini, elle a une limite finie pour $x = a$

— Séries convergentes. —

(3, §6.) Si à la série : $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$

on fait correspondre la suite des sommes des n premiers termes :

$$s_1, s_2, \dots\dots s_n, \dots$$

et si la série est convergente, la différence entre s_n et s_{n+r} (quelque si grand que soit r) reste plus petite que chaque grandeur donnée, pourvu qu'on ait pris n suffisamment grand (Condition nécessaire)

(Cf. Cauchy, Cours d'Analyse, p. 125.)

§7.) Si une suite : $s_1, s_2, \dots\dots s_n, \dots$

est telle que la différence entre s_n et s_{n+r} (si grand que soit r) reste plus petite que chaque grandeur donnée, pourvu qu'on prenne n suffisamment grand, il y a toujours une grandeur, et une seule, dont les termes de cette suite approchent de plus en plus et dont ils peuvent différer aussi peu qu'on veut, si l'on prolonge la suite suffisamment loin.

— Fonctions continues. —

8.) Une fonction $f(x)$ est continue au voisinage de la valeur x si la différence : $f(x+\omega) - f(x)$ peut être rendue plus petite que toute grandeur donnée, en prenant ω suffisamment petit.

Corollaire : Si deux fonctions de x, $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont continues pour toutes les valeurs de x comprises entre α et β, et si l'on a :

$$f(\alpha) < \varphi(\alpha) \qquad f(\beta) > \varphi(\beta)$$

il y a toujours une valeur de x, comprise entre α et β, pour laquelle on a :

$$f(x) = \varphi(x).$$

(Cf. Cauchy, Cours d'Analyse, p. 460)

Cette vérité, que toute fonction continue ne peut passer d'une valeur à une autre sans prendre toutes les valeurs intermédiaires, résulte de

la définition de la continuité, loin de pouvoir en tenir lieu
car ~~elle~~ cette condition n'est pas suffisante pour définir la continuité.

(4) Si deux fonctions $F(x)$, $F'(x)$ sont définies et uniformes dans l'intervalle $(a, a+h)$, continues pour $x = a$, et si la différence $|F(x) - F'(x)|$ peut être rendue plus petite que tout nombre donné, en prenant $\underline{x}$ suffisamment voisin de $\underline{a}$, on a :

$$F(a) = F'(a).$$

— Rectification des courbes.

(4) Bolzano définit la longueur d'une courbe sans invoquer l'axiome d'Archimède, ni supposer que le rapport de l'arc à la corde a pour limite 1 quand celle-ci tend vers 0. Il pensait au contraire que ces propositions doivent se déduire de la formule de rectification. Seulement il a eu le tort de considérer la longueur d'une ligne continue comme une grandeur mesurable, sans condition (V. Duhamel, III, p 386).

— Appendice : sur la Rectification des courbes.

Les géomètres grecs ~~supposaient~~ considéraient deux lignes finies ou deux aires finies quelconques comme comparables entre elles. Archimède suppose 1° que de toutes les lignes ayant mêmes extrémités, la droite est la plus courte ; 2° que de deux lignes convexes ayant mêmes extrémités, situées dans un même plan et ~~concaves~~ du même côté de leur corde commune, l'enveloppée est la plus courte. Il attribuait donc un rapport à deux grandeurs quelconques. Or Euclide (V, déf.) ~~[illegible]~~ dit que deux grandeurs ont un rapport quand la plus petite peut, multipliée, surpasser la plus grande. D'où le dernier des postulats d'Archimède (De sphaera et cylindro). Quand deux lignes, surfaces ou solides sont inégaux, l'excès de la plus grande sur la plus petite est assez grand pour que ~~multiplié~~ ajouté un certain nombre de fois à lui-même, il devienne plus grand que toute grandeur de l'espèce des grandeurs comparées.

Cf. Duhamel (II, p. 411)

P. du Bois-Reymond (ap. Mathematische Annalen t. XV)

Soit une courbe exprimée par la fonction uniforme et continue $y = f(x)$, entre les points A et A', d'abscisses $\underline{a}$ et $\underline{a'}$. On intercale les $(n-1)$ points $A_1\, A_2 \dots A_{n-1}$, d'abscisses $a_1\, a_2 \dots a_{n-1}$ (dont les intervalles sont : $\delta_1\, \delta_2 \dots \delta_n$).

Si la fonction uniforme et continue $y = f(x)$ possède pour tous les points de l'intervalle (a, a'), sauf peut être pour un ensemble fini de points, une dérivée qui forme ~~une fonction~~ pour l'ensemble des autres points une fonction finie intégrable dans l'intervalle (a, a'), le périmètre du polygone I_n a, quand les δ décroissent indéfiniment, une limite finie I, qui est : $$I = \int_a^{a'} \left|\sqrt{1 + f'(x)^2}\right| dx$$

$f(a_r) = b_r$, on a (en coord. rectang.): $$I_n = \sum_1^n \left|\sqrt{1 + \left(\frac{b_r - b_{r-1}}{\delta_r}\right)^2}\right| \delta_r$$

Définition arithmétique de l'intégrale définie (Weierstrass)

Soit $f(x)$ une fonction définie uniforme soit pour toutes les valeurs de l'intervalle (a, a'), soit pour un ensemble de valeurs partout condensé dans cet intervalle, et dont toutes les valeurs ~~soient~~ comprises entre deux nombres finis. On partage l'intervalle $(a' - a)$ en $\underline{n}$ parties δ:
$$a = a_0,\quad a + \delta_1 = a_1,\quad a_1 + \delta_2 = a_2, \dots a_{n-1} + \delta_n = a_n = a',$$
on prend pour x_r une valeur qcq. comprise entre a_{r-1} et a_r —

Pour que la somme $\sum_1^n \delta_r f(x_r)$ ait une limite finie J quand les δ décroissent indéfiniment, il faut et il suffit qu'à tout nombre positif ε corresponde un nombre pos. ρ tel qu'on ait l'inégalité :
$$\left|\sum_1^n \delta_r f(x_r) - J\right| < \varepsilon$$
pour toutes les valeurs des δ plus petites que ρ (leur somme étant ~~$a' - a$~~ toujours
$$\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_n = a' - a \qquad (\delta_r > 0.)$$

Le nombre J s'appelle, par définition, l'intégrale définie :
$$\int_a^{a'} f(x) . dx.$$

Or, en vertu des hypothèses faites pour la dérivée de $f(x)$, on a, par le théorème de la moyenne (d'O. Bonnet):

$$I_n = \sum_1^n \left|\sqrt{1+f'(x_r)^2}\right| \delta_r \qquad a_{r-1} < x_r < a_r$$

Mais si $f'(x)$ est intégrable dans l'intervalle fini (a, a') $\sqrt{1+f'(x)^2}$ l'est aussi; donc: $\lim\limits_{\delta_r=0} I_n = I$.

c.à.d: $$\lim \sum_1^n \left|\sqrt{1+\left(\frac{b_r - b_{r-1}}{\delta_r}\right)^2}\right| \delta_r = \int_a^{a'} \left|\sqrt{1+f'(x)^2}\right| dx$$

Si: $\int_a^{a'} f'(x)\,dx$ est absolument convergente, $\int_a^{a'} \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$ est aussi convergente; si la première intégrale est infinie, la seconde l'est aussi.

On peut donc imaginer des arcs de courbe continus pour lesquels la somme I_n croît indéfiniment quand les δ décroissent indéfiniment. Soit la courbe:

$$x=0,\ y=0; \quad x \gtrless 0, \quad y = \int_0^x \sin\frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \sin\frac{1}{x}$$

On sait que $$\int_0^\infty \left|\frac{1}{x} \sin\frac{1}{x}\right| dx = \pm\infty$$

Donc tout arc de cette courbe, depuis 0 jusqu'à un point quelconque, a une longueur infinie.

On voit qu'on ne peut admettre que tout arc continu ait une longueur représentée par un nombre. Il faut d'abord que cet arc soit mesurable.

De même l'existence d'un nombre représentant l'aire d'une courbe entre deux abscisses finies résulte de l'existence de l'intégrale définie: $\int^{a'} f(x)\,dx$

tandis que Duhamel fonde l'existence de l'intégrale définie sur celle du nombre qui mesure l'aire. (II, 406, III, 348)

Cournot (Théorie des fonctions, I, 296) soutient que le nombre qui mesure la surface peut être conçu sans passage à la limite mais non le nombre qui mesure l'arc. M. de Tilly (ap. Mém. de la Société des sciences physiques de Bordeaux, 2e série, t. III, 87) rappelle que l'existence du nombre qui mesure l'aire ne résulte pas seulement du passage à la limite où l'on considère les polygones inscrit et circonscrit, mais n'est assurée que quand ce même nombre apparaît aussi comme la limite de la somme des parties (à contour rectiligne) dans lesquelles la surface donnée est décomposée par deux systèmes de courbes.

H. Poincaré (1) ap. Journal de Liouville-Jordan, 4e série, t. VIII (1892)

Cf. Dedekind, Théorie des nombres entiers algébriques (G.-V. 1877)

On appelle nombre algébrique toute racine de l'équation :

$$a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \qquad (1)$$

dont les coefficients a_i sont des nombres entiers ordinaires. Ce nombre algébrique est dit entier si le coefficient $a_m = 1$.

Considérons maintenant tous les nombres de la forme suivante :

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_{m-1} x^{m-1} \qquad (2)$$

où les coefficients α_i sont des nombres rationnels ordinaires et où x satisfait à l'équation (1). Ce sont évidemment des nombres algébriques, et nous disons qu'ils appartiennent tous au corps défini par l'équation (1).

Parmi les nombres algébriques qui font partie d'un corps nous distinguerons ceux qui sont entiers, et nous dirons qu'ils appartiennent à un système de nombres complexes, système défini par l'équation (1).

Il résulte de ces définitions que la somme et le produit de deux nombres complexes d'un système sont deux nombres complexes du même système.

Pour éclaircir ces définitions, supposons que l'éq (1) s'écrive :

$$x^2 + 3 = 0$$

les nombres du corps correspondant seront de la forme :

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 \sqrt{-3}$$

α_0 et α_1 étant rationnels. Si α_0 et α_1 sont entiers, le nombre y sera certainement un nombre entier algébrique, et appartiendra par conséquent au système de nombres complexes considéré.

(1) Extension aux nombres premiers complexes du théorème de M. Tchebicheff

Mais cette condition n'est pas nécessaire. Si, en effet, $2\alpha_0$ et $2\alpha_1$ sont deux entiers impairs, nous aurons :

$$4\alpha_0^2 \equiv 4\alpha_1^2 \equiv 1 \pmod 4$$

et par conséquent :

$$4\alpha_0^2 + 12\alpha_1^2 \equiv 0 \pmod 4$$

Le nombre y sera donc entier algébrique et fera partie du système, puisqu'il satisfera à l'équation :

$$y^2 - 2\alpha_0 y + (\alpha_0^2 + 3\alpha_1^2) = 0$$

dont les coefficients sont entiers.

Cela posé, considérons p nombres complexes d'un même système :

$$y_1, y_2, \dots, y_p.$$

Soient ensuite :

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$$

p nombres complexes arbitraires appartenant au même système. Le nombre :

$$z = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_p y_p$$

fera évidemment encore partie de ce système. L'ensemble de tous les nombres complexes z qu'on obtient, en donnant aux coefficients complexes arbitraires α_i toutes les valeurs possibles, s'appellera un *idéal*, et les p nombres y_i formeront la *trame* de cet idéal.

Deux nombres complexes u_1 et u_2 sont *congruents* par rapport à un idéal, quand leur différence $u_1 - u_2$ fait partie de cet idéal ; on peut dire aussi qu'ils ~~font partie~~ appartiennent à la même *classe* par rapport à cet idéal. Le nombre des classes entre lesquelles les nombres complexes se répartissent ainsi par rapport à un idéal donné s'appelle la *norme* de cet idéal.

Un idéal A est *divisible* par un autre idéal A', quand tous les nombres complexes qui appartiennent à A font aussi partie de A'.

Note de M. Kronecker sur ses travaux algébriques (Monatsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin - 27 juin 1861.) trad. par Houel. ds les Annales de l'Ecole Normale Supérieure, t. III, 1866.

Théorème d'Abel.

Si une équation est résoluble algébriquement, on peut ~~toujours~~ donner à la racine une forme telle, que toutes les fonctions algébriques dont elle se compose soient exprimables par des fonctions rationnelles des racines de l'équation proposée

~~Kronecker~~ Dedekind : (Cf. Vorlesungen über Zahlentheorie de Dirichlet.

Sur la théorie des nombres entiers algébriques: Bulletin des Sciences math. t. 11, 1876, p. 278 — t. 1, 1877, p. 17, 69, 144, 207.

Sur la théorie des nombres complexes idéaux: Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 90, 1880, p. 1205.

La notion de congruence a été introduite par Gauss: Disquisitiones arithmeticae, art. 1.

Un nombre θ est dit un nombre algébrique lorsq
satisfait à une équation :

$$\theta^n + a_1\theta^{n-1} + a_2\theta^{n-2} + \dots + a_{n-1}\theta + a_n =$$

de degré fini n et à coefficients rationnels a
il ~~est dit~~ un nombre entier algébrique quan
tous les coefficients sont des nombres entiers ratio
($\pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$)

De cette définition il résulte que les somme
différences et les produits de nombres entiers son
tous aussi des nombres entiers.

…iversité
de
…ance.

Ecole Normale Supérieure.

Paris, le 18

Monsieur,

J'ai l'honneur de vous rappeler que …us avez emprunté à la Bibliothèque de l'Ecole …epuis

Ouvrage suivant :

Le règlement de la Bibliothèque ne nous …ermettant pas de prêter les livres pour plus d'un …ois, je vous prie de vouloir bien nous rendre le plus …qu'il vous sera possible l'ouvrage désigné ci-dessus.

Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance …e ma considération la plus distinguée.

Le Bibliothécaire,

Définissons maintenant le produit de deux idéaux A et B.
Supposons que la trame de A se compose des nombres complexes :

$$y_1\ y_2 \ldots y_p$$

et celle de B des nombres complexes :

$$z_1\ z_2 \ldots z_q$$

Celle du produit AB se composera des pq nombres complexes

$$z_i\, y_k \qquad (i = 1, 2, \ldots q \quad ; \quad k = 1, 2, \ldots p)$$

Il est clair que le produit AB est divisible par A et par B ; mais M. Dedekind a démontré la réciproque, à savoir que si un idéal B est divisible par A, il sera le produit de A par un autre idéal C.

La norme du produit de deux idéaux est égale au produit des normes de ces idéaux.

Un idéal unité est celui dont la trame se réduit au nombre 1, et qui se compose, par conséquent, de tous les nombres complexes du système. Sa norme est égale à 1. Un idéal quelconque est divisible par l'idéal unité.

Un idéal est premier s'il n'est divisible que par lui-même ou par l'idéal unité. M. Dedekind a alors démontré son théorème fondamental : Un idéal quelconque peut toujours être décomposé, d'une manière et d'une seule, en facteurs idéaux premiers.

Il peut arriver que deux trames :

$$y_1, y_2, \ldots y_p$$

$$y'_1, y'_2, \ldots y'_q$$

soient équivalentes et donnent naissance au même idéal.
On peut donc se proposer le problème suivant : Étant donné un idéal défini par sa trame, réduire cette trame à sa plus simple expression, c.à.d la remplacer par une autre trame équivalente,

de façon à abaisser autant que possible le nombre des entiers complexes dont elle se compose. Ce nombre peut généralement être réduit à deux, et quelquefois à un. Dans ce dernier cas l'idéal se compose de tous les multiples de l'entier complexe unique qui en forme la trame, et l'on dit que c'est un idéal principal.

Considérons maintenant trois idéaux A, B, C qui ne soient pas principaux, et supposons que les produits AC et BC soient des idéaux principaux. Nous dirons alors que les deux idéaux A et B appartiennent à la même classe. Le nombre des classes entre lesquelles se répartissent ainsi les idéaux (et qu'il ne faut pas confondre avec les classes entre lesquelles se répartissent les nombres complexes par rapport à un idéal donné) est fini.

Nous considérerons en particulier le système des idéaux que l'on obtient en partant de l'équation:

$$x^2 + 1 = 0$$

Le système des nombres complexes correspondants se compose donc de tous les nombres complexes de Gauss:

$$a + bi$$

où a et b sont entiers.

Il n'y a alors qu'une seule classe d'idéaux, et tous les idéaux ~~seront~~ sont principaux. Un idéal quelconque se composera donc de tous les multiples d'un nombre complexe $a+bi$, qui formera sa trame. Il aura pour norme a^2+b^2, et pourra être représenté lui-même par le symbole $a+bi$.

Deux nombres complexes $a+bi$ et $c+di$ peuvent donner naissance au même idéal, si:

$$\begin{cases} c = b \\ d = -a \end{cases} \quad \text{ou si;} \quad \begin{cases} c = -a \\ d = -b \end{cases} \quad \text{ou si;} \quad \begin{cases} c = -b \\ d = a \end{cases}$$

car alors $a+bi$ et $c+di$ sont multiples l'un de l'autre: les deux idéaux qu'ils représentent sont donc identiques.

Lettre de M. Weierstrass à M Schwarz, communiquée à la Société royale des sciences de Gœttingue le 1er déc. 1883, publiée dans les Nachrichten de 1884, n° 10.

Selon Weierstrass, si Gauss n'admettait pas de l'arithmétique de grandeurs à plus de deux dimensions, c'est parce que le produit de deux telles grandeurs peut s'annuler sans qu'aucune d'elles ne s'annule. (M Dedekind est d'un avis différent : il pense que Gauss a entrevu la véritable raison, à savoir que ces grandeurs sont réductibles aux nombres complexes ordinaires)

On pose:
$$a = \Sigma_i \alpha_i e_i \qquad i = 1, 2, \dots n$$
$$b = \Sigma_i \beta_i e_i$$

D'où: $a+b = \Sigma(\alpha_i+\beta_i) e_i, \quad a-b = \Sigma(\alpha_i - \beta_i) e_i.$

$$ab = \Sigma \alpha_b \beta_c \cdot e_b e_c$$

Pour que le produit ab soit de même forme que ses facteurs, il faut que: $e_b e_c = \Sigma_a \varepsilon_{abc} e_a$

d'où: $ab = \Sigma_{abc} (\varepsilon_{abc} \alpha_b \beta_c) e_a$

Pour que le quotient de 2 nombres soit de même forme, il faut que: $\frac{a}{b} = \Sigma_a \gamma_a e_a$

Pour qu'il soit bien ~~déterminé~~ défini, il faut que les équations:
$$\alpha_a = \Sigma_{bc} (\varepsilon_{abc} \beta_b \gamma_c) e_a$$ (qui déterminent les γ)
soient déterminées, c.à.d. que leur déterminant:
$$\varepsilon = \left| \Sigma_b \varepsilon_{abc} \beta_b \right|$$
ne soit pas nul identiquement (c.à.d. pour tout système de valeurs attribuées aux β)

Dans ce cas, il y aura un module de la multiplication

$$e_0 = \frac{a}{a} \quad \text{d'où :} \quad a e_0 = e_0 a = a.$$

Une équation algébrique entre nombres complexes :

$$x^m + a x^{m-1} + b x^{m-2} + \dots + l = 0 \quad (1$$

revient à n équations entre leurs composants :

$$(2) \quad x_k^m + a_k x_k^{m-1} + b_k x_k^{m-2} + \dots + l_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots$$

Ce sont des éq. algébriques à coefficients réels ou ima[ginaires] qui ont en gén. m racines (réelles ou imaginaires) à moins que leurs coefficients ne soient nuls.

Or, si tous les coefficients de l'éq. (1) ont un comp[osant] nul, ils contiennent en facteur un diviseur de zér[o]. D'autre part, si une des éq. (2) a une infinité d[e] racines, l'éq. (1) en aura une infinité. Donc une éq. alg. entre nombres complexes à n unités ne peut avoir une infinité de racines que si tous se[s] coefficients contiennent en facteur un diviseur de z[éro].

De plus si une des éq. (2) est à coefficients réels elle n'aura pas en gén. ses m racines réelles, c[e] que le composant x_i qu'on en tirera ne sera pa[s] à 1 unité capitale, comme cela devrait être. D[onc] pour que l'éq. (1) n'ait pas de racines imaginaires c.à.d. pour que toutes ses racines (au nombre de m^n) appartiennent à l'ensemble considéré, il faut en gén. et il suffit, que tous les ensembles partiels soient à 2 unités c.à.d. qu'il n'y en ait que $\frac{n}{2}$. Alors le nombre des racines appartenant à l'ensemble sera sûrement : $m^{\frac{n}{2}}$.

Weierstrass: Abhandlungen aus der Functionenlehre. Berlin, Springer 1886.

1 Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen
aus den Abh. der K. Akad. d. W. zu Berlin 1876.

2 Ueber einen functionentheoretischen Satz d. H. Mittag-Leffler
aus den Mon. ber. d. K. Acad. d. W. zu Berlin 1880.

3 Zur Functionenlehre " 1880.

4. Nachtrag ___ 1881.

5. Einige auf die Theorie der analytischen Functionen mehrerer Veränderlichen sich beziehende Sätze

6. Neuer Beweis eines Hauptsatzes der Theorie der periodischen Functionen von mehreren Veränderlichen. 1876.

7. Ueber die Theorie der analytischen Facultäten.
aus Crelle t. LI. 1856.

378 A

378 B

Dedekind: Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen (Nachrichten, 1885, nº 4.)

Cf. § 159 de la 2e éd. (1871) des Leçons sur la théorie des nombres, de Dirichlet

Dedekind considère un syst. de n^2 quantités:

$$e_r^s \qquad (r, s = 1, 2 \dots n)$$

telles que les n unités capitales se transforment par substitution linéaire en les n quantités:

$$e_1^s, e_2^s, \dots e_n^s.$$

On suppose le déterminant des e_r^s différent de zéro.

On peut en déduire un système de n unités capitales (normal)

$e_1 e_2 \dots e_n$ telles que:

$$e_r e_s = 0 \quad (r \gtrless s) \qquad e_r e_r = e_r.$$

de la unité ... $\dots + e_n$

On suppose le système irréductible, c. à d. qu'un nombre n'a qu'un seul système de coordonnées:

$$x = \Sigma e_i \xi_i$$

On a donc, si: $\quad y = \Sigma e_i \eta_i$

la formule du produit: $\quad xy = \Sigma e_i \xi_i \eta_i$

Et dès que $n > 1$, on peut avoir: $\quad xy = 0$ sans que ni x ni y soient nuls. En effet, il suffit pour cela que certains composants de x soient nuls, ce qui annule les composants correspondants de xy, et que ceux des composants de y qui ne correspondent pas à ceux-là soient aussi nuls, ce qui annule tous les autres composants de xy. (Par exemple, si: $x = x_1 e_1 + 0.e_2$

$$y = 0.e_1 + y_2 e_2$$

$$xy = 0.e_1 + 0.e_2 = 0.$$

Alors l'équation : $ax = 0$

et en gén. toute éq. algébrique a une infinité de racines non nulles (si a est un diviseur de zéro)

Toutes les relations entre nombres complexes à $\underline{n}$ unités sont déterminées par les relations :

$$e_r e_s \cancel{e_p e_q} = \sum_i e_i \eta_{i,rs}$$

c.à.d par le système des coefficients $\eta_{t,rs}$ / Éd. de Weiers

Des lois commutative et associative :

$$e_r e_s = e_s e_r \qquad (e_r e_s) e_t = (e_r e_t) e_s$$

résultent les équations de condition suiv. entre les η :

$$\eta_{t,rs} = \eta_{t,sr} \qquad \sum \eta_{u,ti}\, \eta_{i,rs} = \sum_i \eta_{u,si}\, \eta_{i,rt}$$

$$(r, s, t, u = 1, 2 \ldots n)$$

Inversement si l'on se donne le système des $\eta_{t,rs}$, on en peut déduire un système de $\underline{n}$ unités capitales $e_1 e_2 \ldots e_n$.

Une équation algébrique entre les $\underline{n}$ unités capitales n'est vraie que si elle est vérifiée par chacun des systèmes de leurs composants : $e_1^s\ e_2^s \ldots\ e_n^s$.

(on pose : $e_r = e_r^1 + e_r^2 + \ldots + e_r^n$)

Remarque. M. Weierstrass donne pour éléments à ses nombres complexes des nombres réels ; M. Dedekind prend pour éléments des nombres imaginaires (ou réels) de sorte qu'il y a toujours $\underline{n}$ ensembles partiels, et que chaque nombre a toujours $\underline{n}$ composants.

Ch. Méray : Les fractions et les quantités négatives (Gauthier Villars, 1890)
(extrait de Leçons nouvelles sur l'Analyse infinitésimale et ses applications géométriques, par MM Méray et Riquier.)
(extrait des Nouvelles Annales de Mathématiques, 3e série, tomes VIII et IX.)

Théorie élémentaire des fractions dégagée de toute considération impliquant soit la subdivision de l'unité abstraite, soit l'intervention des grandeurs concrètes.

Le résultat de la multiplication de E par n et de la division du produit par d (non nul), si cette division est possible peut s'écrire : $E \times \frac{n}{d}$ ou $\frac{n}{d} \times E$

Pour conserver les avantages de cette notation même quand n n'est pas divisible par d, on convient de représenter même alors le résultat de l'opération indiqué par le signe : $E \times \frac{n}{d}$, produit du nombre E par le facteur fictif $\frac{n}{d}$.

Quand E est divisible par d, l'opération revient à prendre les n $d^{\text{ièmes}}$ de E ; d'où la signification de la fraction.

Définitions : $\frac{n}{d} \gtreqless \frac{n'}{d'}$ suivant que $nd' \gtreqless n'd$

Donc $\frac{n}{d} = \frac{kn}{kd}$.

La division est toujours possible, sauf quand le diviseur est nul $\left(\frac{0}{d}\right)$

Les entiers entrent comme cas particuliers dans les fractions $\left(\frac{e}{1}\right)$.

Propriétés de l'ensemble des nombres fractionnaires :

On peut toujours trouver une fraction plus petite qu'une fraction donnée.

On peut toujours trouver deux fractions différant d'aussi peu qu'on veut.

Grandeurs commensurables : idée du rapport de 2 grandeurs.

L'extension de la notion de rapport à deux grandeurs qui théorique
ne sont pas commensurables, par suite la généralisation complète
celle de mesure, exigerait sur les nombres abstraits commensurables
qques développements.... Pratiquement, d'ailleurs, deux grand
similaires sont toujours commensurables ; car, pour nos sens, t
grandeur est ~~la~~ une somme de qques autres égales entre elles, pour
que la petitesse de celles-ci rende imperceptible toute grandeur non

Théorie des quantités négatives.

Confusion entre les signes opératoires +, et −, et les signes consti
tionnels des quantités positives et négatives.

Introduction des quantités positives et négatives $\vec{a}$, $\overleftarrow{a}$,
et de la quantité neutre (de valeur absolue nulle) $\overleftrightarrow{0}$.

Quantités égales, opposées.

Règle de l'addition des quantités qualifiées. Soustraction
Définition de l'inégalité de 2 quantités qualifiées (différence pos. ou

Règle des signes dans la multiplication. Quotient.

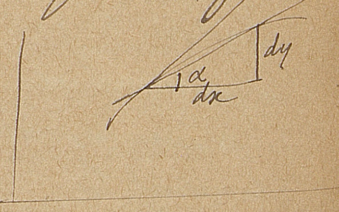
On peut changer les additions en soustractions, et réciproquement,
changeant les noms des quantités qualifiées ; et inversement, on p
changer le nom de ces quantités en changeant les signes d'opérat

C'est ainsi qu'on ramène un polynôme à ne contenir que le s
opératoire + ; alors on le sous-entend, et on indique les termes pos. et nég
par les signes + et −, devenus signes qualificatifs. On peut
aussi réduire tous les termes à être positifs, alors les opérations coïnc
avec les opérations arithmétiques, d'où la confusion possible
nombres positifs avec leurs valeurs absolues, et de la quanti
neutre $\overleftrightarrow{0}$ avec le 0 arithmétique

Carnot : Métaphysique du calcul infinitésimal

De ce que les infiniment petits peuvent être rendus aussi petits [qu']on veut, il ne s'ensuit pas qu'on puisse les négliger dans [les] formules en toute rigueur, car on ne peut pas les rendre nuls [sa]ns quoi les formules n'auraient plus de sens. Par ex. le coeff. ang. [de] la sécante est $\frac{dy}{dx}$ $\frac{\delta y}{\delta x}$; on peut rendre δx et δy aussi [pe]tits qu'on veut, mais on n'a jamais qu'une sécante ; et si l'on [veut] avoir la tangente, il faut annuler δx et δy ; mais alors [le]ur rapport n'a plus de sens. (p. 36, Carnot admet cette objection)

De plus, il n'est pas toujours vrai qu'on puisse rendre les différentielles [aus]si petites qu'on le veut sans changer la valeur des quantités finies ;



[ex]em : si l'on prend dx et dy finis, on n'a pas [le] même angle α qu'au moment où dx, dy [s']évanouissent. Donc tant que ces quantités [exis]tent, d'ailleurs aussi petites qu'on veut, on [n']a pas rigoureusement l'angle α ; et [q]uand on a l'angle α, ces quantités n'existent plus.

Les mathématiciens distinguent soigneusement les quantités très [gra]ndes ou très petites des infiniment grands ou infiniment petits, [s]avent que dans le 1er cas ils commettent une erreur ~~tout ils~~ dont ils ~~saluent un~~ assignent une limite supérieure, et que dans le 2e cas [ils] n'en commettent aucune (c'est la diff. des séries mathém[atiques] [e]t des séries astronomiques)

[C']est un fait historique ; c'est que l'inventeur du calcul infinitésimal [n'a] pas considéré ~~sa métho~~ comme une méthode de compensation [d'er]reurs, et qu'il ne pouvait rien inventer en partant d'une considéra[tion] aussi stérile

[Re]marquer que C. introduit l'infiniment grand par l'infiniment petit. [Il sem]ble plus naturel de concevoir l'infiniment petit comme $\frac{1}{n}$, [n] prenant des valeurs de plus en plus grandes —

Selon C. les seules équations exactes auraient lieu entre quantités f[inies]
les éq. différentielles seraient nécessairement inexactes. Or il semble
que celles-ci expriment des relations tout aussi rigoureuses que c[elles-là.]
Pour le montrer, il suffit de mettre des dérivées à la place des différen[tielles.]
En tout cas, le calcul infinitésimal n'a pas simplement pour but [de]
trouver des relations entre quantités finies, et les éq. ~~différen~~
les inf.-petits ou les dérivées ne sont pas nécessairement auxil[iaires.]
Exemples: expression du rayon de courbure; de l'élém. linéaire
d'une surface.

p. 45, 48: Comment, en sommant des égalités entre infiniment p[etits]
dont on ne peut affirmer l'exactitude ~~pourrait-on~~ des égal[ités]
rigoureuses entre quantités finies? Il se pourrait qu'en s'additionn[ant]
les erreurs infiniment petites commises dans chacune des 1res égal[ités]
donnent lieu à une erreur finie dans l'égalité finale, qui
soit dégagée de l'infini.

p. 75. Les équations différentielles ne sont pas des équations imparfa[ites]
p. 86. L'égalité: $S = \int y dx + C$ n'est pas imparfaite
95. rigoureuse, tout autant que l'égalité en termes finis qu'on o[btient]
en effectuant l'intégrale, et dont elle est le symbole.
p. 96: L'égalité: $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ n'est pas imparfaite
encore moins: $s = \int \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

p. 101: La sous-tangente est $y \dfrac{dx}{dy}$, et non infiniment peu diff[érente.]
Il suffit de remplacer $\dfrac{dx}{dy}$ par $\dfrac{1}{y'}$ pour avoir une express[ion]
finie et rigoureusement exacte.

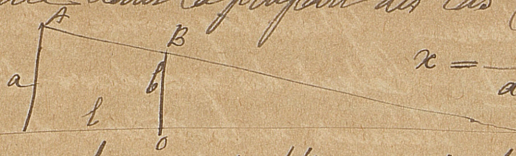
p. 132. Le raisonnement qui considère la pyramide comme formé[e d'un]
nombre essentiellement fini de tranches (ce qui est nécessaire [pour]
qu'on puisse appliquer la formule $\sum_1^p n^2 = \dfrac{p(p+1)(2p+1)}{1.2.3}$

384

plus valable quand le ~~nombre~~ devient infini. D'où vient
tant qu'il donne à la limite un résultat exact ? C'est en
de la continuité, qui fait que les propriétés trouvées pour des
finis restent vraies ~~[illegible]~~ à l'infini, c.à.d. que les relations prouvées
composant le continu suivant un nombre arbitraire subsistent
la décomposition, supposée achevée, dépasse tout nombre ; ou
ne deviennent rigoureusement exactes que lorsque la division
tout nombre et rejoint la continuité par l'artifice
de l'infini. L'introduction du nombre était une
d'erreur ; cette erreur ne s'élimine que par la considération
infini, qui exclut celle de nombre et rétablit la continuité.
C'est le contre-pied de la théorie de Carnot, qui voit dans l'infini une cause d'inexactitude.
Il est bien remarquable que la considération des limites (des
) ne suffise pas au calcul infinitésimal, et qu'il faille traiter
différentielles comme des quantités existant par elles-mêmes.
-ce à dire, sinon que les quantités infiniment petites ne sont
une simple fiction, mais ont leur raison d'être dans la nature
respondent à qqu chose de réel ? La vérité et l'utilité des
où les différentielles figurent est une preuve a posteriori
la légitimité de cet algorithme. (Cf Cournot, Essai, § 201.)
. On connaît par la définition rigoureuse de la limite, et croit
implique nécessairement l'idée d'infiniment petit.
On voit ici combien l'introduction des n. négatifs paraissait
étrange et quasi monstrueuse à Carnot. Et en effet, ~~elle présente~~
généralisation des solutions de l'éq. du 1er degré, elle devait
scandaleuse et paradoxale. Aussi une solution négative est-elle
dérée comme un symbole d'impossibilité, tandis qu'elle est aussi
et aussi exacte qu'une solution positive (dont elle est symétrique)
même, $\frac{m}{0} = \infty$ est un symbole d'impossibilité ~~pour~~, si l'on considère

ce résultat au p. de vue droit du nombre ; mais c'est une solu
~~exacte~~ admissible et exacte dans la plupart des cas (en géométr

Exemple : $\frac{x}{b} = \frac{l+x}{a}$



$x = \frac{bl}{a-b}$ $x =$ pour

Cette solution : $x = \infty$
correspond à une position parfaitement déterminée de la sécante
et nullement à une impossibilité du problème

p 178 : C'est s'embarrasser de difficultés inutiles que de s'imaginer qu
fait des hypothèses contradictoires, pour expliquer les sol. négat
— La logique de C. est bien sévère et bien étroite — On ne sait pas d'avan
si le résultat est gain ou perte ; pourquoi dire qu'on s'est trompé d
l'hypothèse ! On est convenu que le signe + représenterait le gain
— la perte ; cela ne fait pas 2 problèmes différents selon le signe de la s
tout au plus l'énoncé en langage vulgaire ~~peut~~ doit-il être modifié
C. ne veut pas qu'on appelle une perte un gain négatif ; mais n'app
pas accroissements des variations qui peuvent fort bien être d
nutions, sans que ce langage offre la moindre contradiction ?
le principe de Carnot : ce qu'on appelle vitesse perdue ~~peut aussi~~
~~être souvent~~ est souvent un accroissement ~~de vitesse~~ pris négativement.

p 182 : On ne peut pas dire qu'une valeur négative est fausse — Les signes
ne marquent pas seulement les opérations mais le sens dans lequel on
porte les grandeurs linéaires. (Cf. Tannery et Padé) (
p 183 : C. pressent la distinction du signe apparent et du signe vrai
p 184 : Toutes ces difficultés disparaissent avec la convention du sens ind
par les signes — Il serait étrange qu'une éq. ne fût vraie que ds un quart
p 191 : L'exemple des sécantes est spécieux ; mais leur sens est défini par
à l'extrémité de l'arc auquel elles correspondent, et par conséquent
signes sont opposés, bien qu'elles coïncident géométriquement
la sécante est plutôt une quantité analytique que géom. : c'est $\frac{1}{\cos}$
p 199 : C. entrevoit que l'Algèbre est l'étude des quantités positives et négativ
— Il n'y a pas d'hypothèses contradictoires à la base des n. négatifs ; et ce p
n'est pas fait pour fortifier la théorie des erreurs compensées.

Rudolf Lipschitz: Lehrbuch der Analysis. Bonn (Cohen), 1877.

1er Volume: Grundlagen der Analysis.

Section I: Calcul des grandeurs déterminées (désignées)

Ch. I: Éléments de la théorie des nombres entiers.

Ch. II: Calcul des fractions.

Ch. III: Calcul des puissances à exposants entiers ou fractionnaires. Calcul des grandeurs rationnelles et irrationnelles.

Section II: Éléments d'Algèbre

Ch. I: Définition de l'Algèbre

Ch. II: Fonctions alg. rat. entières à une variable de degré quelconque – Equations algébriques à une inconnue, de degré qcque

Ch. III: Fonctions alg. rat. entières à n variables et de degré qcque.

Ch. IV: Systèmes de n fonctions homogènes entières du 1er degré à n variables. Résolution générale de n équations du 1er degré à n inconnues. Théorie des déterminants.

Ch. V: Fonctions homogènes entières de degré qcque à 2 variables.

Ch. VI: Fonctions homogènes entières du second degré (formes quadratiques) à n variables.

Section III: Division indéfiniment prolongée.

Ch. I: Séries récurrentes.

Section IV: Fonctions exponentielles et logarithmiques. Fonctions trigonométriques directes et inverses. (2 Chapitres)

Section V: Sommes et produits infinis.

Ch. I: Propriétés générales des sommes et produits infinis.

Ch. II: Séries de puissances développant les fonctions fondamentales de l'Analyse (binôme, exponentielle, log. arctg.

Second Volume : Calcul différentiel et intégral (1880.)

388

Hermann Schubert (Prof. a. d. Gelehrtenschule des Johanneums in H.)
Zählen und Zahl. Eine kulturgeschichtliche Studie.
Hambourg, 1887.

ap. Sammlung gemeinverständlicher wissenschaftlicher Vorträge, herausggeb. v. Virchow und Holtzendorff
Neue Folge II. Serie. Heft 37.

Cf. Hankel, Beiträge zur Geschichte der Mathematik (Leipz. 1874)
Moritz Cantor, Beiträge zum Kulturleben der Völker (Halle 1863)
" Geschichte der Mathematik (Leipzig 1880)

— Pour qu'il y ait nombre, il faut pouvoir faire abstraction de la nature des objets comptés (1)

Compter des objets, c'est leur en faire correspondre (zuordnen) d'autres un à un (par ex. les doigts des mains et des pieds)

Ainsi, si dans une classe il y a autant de patères que d'élèves, le maître constate d'un coup d'œil si tous les élèves sont présents, en s'assurant que chaque patère porte un chapeau. Par là même il a compté ses élèves, alors même qu'il n'aurait aucun mot ni signe pour représenter leur nombre.

Les noms de nombre naturels consistent dans la répétition d'un son (ex: les heures que sonne une horloge)

Les signes de nombre naturels consistent dans la répétition d'un signe (ex: dominos, dés, cartes; bâtons, etc.)

---

(1) On ne peut pas dire qu'une cane Ente ait l'idée du nombre de ses petits, parce que les connaissant tous personnellement, elle peut s'apercevoir qu'il en manque.

Bellavitis _ Exposition de la Méthode des Equipollences (1854.), trad. Laisant.
Gauthier Villars 1874.

5. Somme géométrique ou composée équipollente de plusieurs droites (B. imagine un voyageur qui les parcourt successivement.)

10. Règle I : $AB + BC \equiv AC$
Conséquence immédiate de la définition de la somme

12. Toutes les opérations additives s'appliquent aux droites de l'espace
Mais les opérations mult^ives ne se définissent que dans le plan

13. Longueur et inclinaison d'une droite : la 1e rapportée à une unité de mesure fixe ; la 2e, à une direction fixe

9. Une équipollence détermine 2 inconnues, savoir la longueur et l'inclinaison ~~de la~~ d'une droite inconnue (gr. AB, inc. AB.)

16. Produits et quotients. Si l'équipollence :

$$AB \cdot CD \equiv EF \cdot GH$$

équivaut aux deux égalités :

$$gr. AB \times gr. CD = gr. EF \times gr. GH$$

$$incl. AB + inc. CD = incl. EF + inc. GH$$

17. Interprétation d'une équipollence homogène quelconque

18. Principe fondamental. On peut faire sur les équipollences relatives aux figures planes toutes les opérations et transformations qui sont légitimes pour les équations algébriques, et les équipollences qui en résultent sont toujours exactes.

19. Une équipollence binôme : $m IL \equiv n MN$
revient à : inc IL = inc MN m gr. IL = n gr. MN
à moins que : $m = n = 0$.

Règle II : Si les deux termes d'une équipollence binôme ont des inclinaisons différentes, chacun d'eux est nul

21. Relation de la méthode des équipollences avec la théorie des parallèles et celle des figures semblables. Comme celles-ci servent à établir cette méthode, on peut les en déduire à leur tour, ce qui fait une « sorte de cercle vicieux »

24 Toute formule de Algèbre se traduit par ~~les pos~~ une relation entre les points d'une droite ; on peut l'étendre aux points d'un plan.
Théorème général. Toute propriété des points d'une droite donne un théorème relatif aux points d'un plan par le seul changement des équations en équipollences.

29. Pour quatre points en ligne droite on a l'égalité :

$$AB.CD + AD.BC = AC.BD$$

Pour tout quadrilatère ABCD on a l'équipollence

$$AB.CD + AD.BC \equiv AC.BD$$

Le th. de Ptolémée (pour le quadrilatère inscrit) a lieu dans le cas particulier où : inc. $AB.CD$ = inc. $AD.BC$
d'où : gr. $AB.CD$ + gr. $AD.BC$ = gr. $AC.BD$

35. Entre quatre points d'une droite ou d'un plan on a l'égalité : $AB.AD + BC.CD = AC(AB + CD)$
Menons $BL \equiv CD$, d'où : $AB + CD \equiv AL$: on a l'équipollence $AB.AD + BC.CD \equiv AC.AL$

45. Droites conjuguées : même grandeur, inclinaisons symétriques.

48. OI et OH étant égales et perpendiculaires, on écrit :

$OI \equiv \sqrt{}\,OH$ $\qquad \sqrt{}$ ramun (i).

50. Règle VI. Le ramun se calcule précisément comme se calcule en Algèbre l'imaginaire $\sqrt{-1}$.

48. $\sqrt{}^{2} = -1$ $\qquad \sqrt{}^{4} = +1$. (ne change pas l'inclinaison)

ε^{u} ~~représente~~ est un coefficient destiné à accroître l'inclinaison d'un angle égal à $\underline{u}$ (rapporté à l'arc de longueur égale au rayon)
Ainsi : $\varepsilon = e^{\sqrt{-1}}$

40. $\sqrt{}^{u}$ représente l'unité de longueur ayant pour inclinaison $\underline{u}$ droits.

La vraie théorie des quantités négatives et des quantités prétendues imaginaires; dédié aux amis de l'évidence par C.-V. Mourey (1828) 2e éd. Mallet-Bachelier 1861.

Extrait de la Préface : « … avec un nouveau système d'Algèbre que je cherchais, j'ai trouvé un nouveau système de Géométrie, auquel je ne m'attendais pas. Ce ne sont cependant pas deux sciences ; ce n'est qu'une seule science, une seule théorie, laquelle a deux faces, l'une algébrique et l'autre géométrique …. »

« L'idée fondamentale de cette théorie est celle du chemin considéré comme conduisant en un seul sens. »

« D'après ce système toutes les racines des équations sont des chemins réels, toutes les formules usitées en Algèbre expriment des chemins réels situés sur un même plan ; toutes les racines de l'unité, en particulier, sont tous les rayons d'un même cercle. »

« Au moyen de cette méthode, nous pourrons enfin démontrer que toute équation a au moins une racine …. »

1. Considération du sud et du nord, du droit et du gauche.

4. Lignes directives ; Addition : deux chemins de suite.

5. Formule fondamentale : $AB + BC = AC$

C'est une convention.

2. L'auteur n'admet pas la soustraction algébrique ($a - x$ où x est inconnu ou indéterminé) et cherche le moyen d'y suppléer.

8. L'égalité n'est pas une relation absolue : deux choses sont égales pour tel emploi, c.à.d sous un certain rapport.

Pour que deux chemins soient égaux, même longueur & même direction.

3. La somme de deux chemins inverses est zéro. Le signe $-$ (qui n'a plus à désigner la soustraction) veut dire inverse de.

21. Angle directif (r). Verseur a_r. Soient 2 rayons égaux,
30. AB, AC ; r = angle BAC = rapport directeur de AC à AB
15. Nombres directifs (Le nombre absolu ne peut être ni fractionnaire ni directif.)
& 29. 42. Une proportion entre nombres directifs équivaut à une
équiquotient entre les longueurs et à une équidifférence
entre les ~~inclinaisons~~ verseurs (angles.)

Essai sur la théorie et de l'interprétation des quantités dites imaginaires, par A. Faure (de Gap.) 1er mémoire
Bachelier, 1845.

(L'auteur connaît Buée, Argand, Français, Mourey)
Cherche à interpréter les racines imaginaires comme on fait les racines négatives. ($\sqrt{p^2-q^2}$ interprété comme $\sqrt{q^2-p^2}$.)
v. Carnot.

Addition, imitée de la composition des forces; on additionne séparément les parties réelles et les parties imaginaires.

32. Multiplication; on multiplie les longueurs et l'on ajoute les inclinaisons.

$$a+b\sqrt{-1} = p(\cos\alpha + \sin\alpha\sqrt{-1})$$
$$c+d\sqrt{-1} = q(\cos\beta + \sin\beta\sqrt{-1})$$

$$(a+b\sqrt{-1})(c+d\sqrt{-1}) = pq\left(\cos(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+\beta)\sqrt{-1}\right)$$
$$\left[p(\cos\alpha+\sin\alpha\sqrt{-1})\right]^m = p^m(\cos\alpha+\sin\alpha\sqrt{-1})^m = p^m(\cos m\alpha + \sin m\alpha\sqrt{-1})$$
par la formule de Moivre.

49. Toute équation ou polynôme a une racine.

Notes sur la polarisation de la lumière.
d'après Bouasse

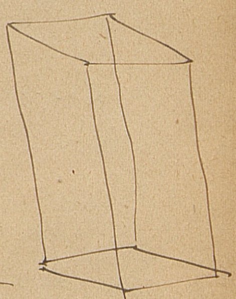
Toute lumière réfléchie est partiellement polarisée. Le plan de polarisation est le plan d'incidence.

Polarisation totale par réflexion sur le verre d'indice moyen (1,52) sous un angle de 56°.

Un appareil polariseur peut servir d'analyseur. Le minimum d'intensité a lieu quand le plan principal de l'analyseur est perpendiculaire au plan de polarisation. Quand ce minimum est nul la polarisation est totale.

– Double réfraction. Certains cristaux réfractent ~~le~~ un rayon incident en deux rayons complètement polarisés dans deux plans rectangulaires. Le spath d'Islande écarte beaucoup les deux rayons réfractés.

Un Nicol est un parallélépipède oblique de spath qui ne laisse passer qu'un des deux rayons suivant sa longueur. Le plan de polarisation de ce rayon est parallèle ~~aux~~ à la grande ~~petites~~ diagonale des ~~la~~ faces terminale (en forme de losange) ~~dans~~ La section principale du Nicol passe par les deux petites diagonales des faces.



Quand un Nicol sert d'analyseur, et que sa position correspond au minimum d'intensité du faisceau (ou à l'extinction totale), le plan de polarisation du faisceau analysé est parallèle à la section principale du Nicol.

Quand un faisceau de lumière naturelle traverse deux Nicols, son intensité est maxima quand leurs sections principales ~~sont~~ sont parallèles; nulle quand elles sont rectangulaires.

Polarisation rotatoire

Une lame de quartz à faces parallèles et normale à l'axe du cristal (prisme hexagonal) fait tourner le plan de polarisation d'un faisceau lumineux qui la traverse suivant l'axe, à droite ou à gauche suivant la nature du cristal (dextrogyre, lévogyre)

La rotation est proportionnelle à l'épaisseur de la lame

L'angle de rotation varie avec la couleur du rayon (longueur d'o

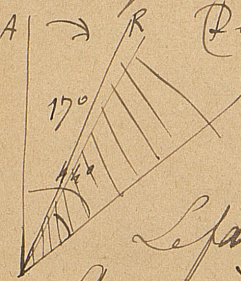
depuis le rouge extrême : 645 $\mu\mu$ long. d'onde 17° 29' 47"

jusqu'au violet extrême 406 $\mu\mu$ 44° 4' 58"

($\mu\mu$ = millième de micron = millionième de millimètre)

pour une lame de 1 millimètre d'épaisseur

En somme quand la lumière blanche polarisée a passé par une lame de quartz de 1 mm. au lieu du plan de polarisation unique O on a un éventail de plans de polarisation ROV pour les divers rayons du spectre, du rouge au violet (ROA = 17°, VOA =



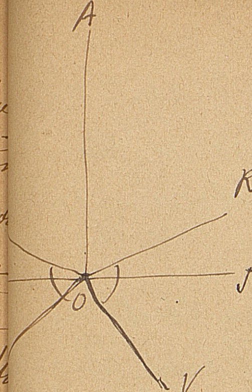
(Dextrogyre) Si l'on regarde le faisceau à travers un second Nicol, on n'éteindra que les rayons dont le plan de polarisation coïncide avec la section principale du Nicol (petite diagona

Le faisceau sera coloré de la teinte complémentaire

Quartz à deux rotations.

Une lame de quartz de 3 mm,75 fait tourner de 90° le plan de polarisation des rayons jaunes. Si l'on juxtapose deux lames semblables l'une dextrogyre l'autre lévogyre on forme un bila

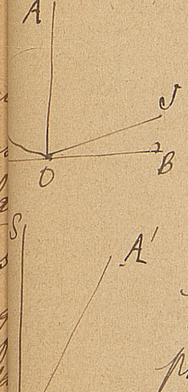
Si on la fait traverser par un faisceau de lumière polarisée, les rayons jaunes seront déviés de 90° à droite et à gauche, c.à.d. leurs plans de polarisation seront en prolongement l'un de l'a



le bilame

Si l'on regarde à travers un Nicol dont la section principale est perpendiculaire à OA, il éteint symétriquement les deux faisceaux et les deux moitiés du bilame ont la même teinte rouge vineux dite teinte sensible; mais si l'on fait tourner tant soit peu le Nicol, les rayons éteints à droite et à gauche ne sont plus les mêmes et les deux moitiés du bilame prendront [des] teintes différentes (rouge et violet ou bleu) C'est un moyen précis pour déterminer le plan de polarisation ~~d'un~~ du faisceau primitif: [il] suffit de tourner le Nicol de manière à obtenir l'égalité même (sensible); la grande diagonale du Nicol est alors parallèle [au p]lan de polarisation.

Avec la lumière simple du sodium, dont le plan de polarisation [est] dévié de 80° par le bilame de 3 mm,75, ~~ou~~ les deux moitiés [du] bilame paraissent jaunes; elles sont également éclairées quand [la se]ction principale du Nicol est perpendiculaire au plan de [polar]isation primitif; inégalement, dès qu'on tourne le Nicol: [l'une] des deux moitiés devient jaune brillante, l'autre s'éteint.



Lame demi-onde (de quartz parallèle à l'axe, ou de mica) Cette lame a un axe et elle a la propriété de refléchir le plan de polarisation par rapport à cet axe OS: par exemple OA vient en OA'. Si l'on intercepte par cette lame la moitié du champ le faisceau total a deux plans de polarisation symétriques par rapport à l'axe de la lame demi-onde. Pour que les deux moitiés du faisceau, vues à travers un Nicol aient la même intensité, il faut que la section principale du Nicol

coïncide avec la bissectrice des deux plans de polarisation, c.à.d. soit parallèle à l'axe de la lame demi-onde. La position du plan de polarisation primitif OA est indifférente, mais les deux moitiés du faisceau sont d'autant plus obscures que l'angle AOS est plus petit.

Pour obtenir des rotations variables d'une façon continue on emploie deux lames de quartz superposées, l'une dextrogyre l'autre lévogyre, de même épaisseur (effet nul). Seulement l'une est fendue en diagonale et ses deux moitiés peuvent se croiser plus ou moins de manière à augmenter ou à diminuer son épaisseur : ce ~~revient~~ produit le même effet qu'une lame d'épaisseur variable qui serait ~~tour à tour~~ dextrogyre et lévogyre

Pouvoir rotatoire des dissolutions.

On dissout un poids p (dans un volume V de liquide inactif de nature à expérimenter) on le verse dans un tube de longueur l (unité : 10 centimètres)

La rotation est donnée par la formule : $R = \rho \frac{pl}{V}$

ρ étant le coefficient rotatoire (+ à droite − à gauche)

Saccharose :	$\rho = +74°$	Lévulose :	$\rho = -106°$
Glucose :	$+53°$	Gomme :	$-36°$
Lactose :	$+58°$	Albumine :	$-35°$
Dextrine :	$+119°$		

La formule permet d'évaluer p connaissant ρ et R (saccha